Centre universitaire de Mila   Institut de Mathématiques et Informatique

Première année LMD Informatique 2023-2024

Matière : Algèbre I   Série 1

Exercice n°1 : Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
1. Le carré d'un nombre réel est positif ou nul.
2. Il existe un entier positif dont le carré est égal à lui-même.
3. Il existe deux nombres réels différents qui ont le même carré.
4. Tout nombre réel a une racine cubique.

Exercice n°2 : Soient les quatre assertions suivantes

$$\begin{aligned}
&(a)\forall m\in\mathbb{Z},\forall n\in\mathbb{Z} : m+n=0..\\
&(b)\forall m\in\mathbb{Z},\exists n\in\mathbb{Z} : m+n=0..\\
&(c)\exists m\in\mathbb{Z},\forall n\in\mathbb{Z} : m+n=0\\
&(d)\exists m\in\mathbb{Z},\exists n\in\mathbb{Z} : m+n=0.
\end{aligned}$$

1. Écrire littéralement les assertions $(a),(b),(c),(d)$.
2. Les assertions $(a),(b),(c),(d)$ sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

Exercice n°3 : Donner la négation des assertions quantifiées suivantes :
1. $\exists a>0,\exists b>0,\forall n\in\mathbb{N} : na\leq b.$
2. $\exists M\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N} : u_n\geq M.$
3. $\forall x,y\in\mathbb{R},\forall\lambda\in[0,1] : f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$
4. $\forall x,y\in\mathbb{R} : x.y=x\Longrightarrow y=1.$

Exercice n°4 : Soient P,Q et R des assertions :

1. À l'aide d'une table de vérité, vérifier les équivalences logiques suivantes :
   (a).
   $$P\wedge(Q\vee R)\Longleftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$$
   (b).
   $$P\vee(Q\wedge R)\Longleftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$$
   (c).
   $$\overline{(P\wedge Q)}\Longleftrightarrow\overline{P}\vee\overline{Q}\ \ ,\overline{(P\vee Q)}\Longleftrightarrow\overline{P}\wedge\overline{Q}$$
2. Sans utiliser de table de vérité, montrer l'équivalence logique suivante
   $$[(P\Longrightarrow Q)\wedge(R\Longrightarrow Q)]\Longleftrightarrow[(P\vee R)\Longrightarrow Q]$$

Exercice n°5 : Soit $n\in\mathbb{N}$, montrer en utilisant un raisonnement par contraposée l'assertion suivante
$$n^2 \text{ est pair } \Longrightarrow n \text{ est pair}$$

Exercice n°6 :
1. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la racine carrée de 2 est un nombre irrationnel, c'est-à-dire $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.
2. En utilisant un raisonnement par disjonction des cas, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair.

Exercice n°7 : Montrer que l'assertion suivante est fausse «Toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est soit paire soit impaire».