المحاضرة السادسة: نظرية المباريات (02)

3-2- المباريات ذات الاستراتيجيات المختلطة:

طبقا لهذا النوع من المباريات يتبنى كل طرف من طرفي المباراة مزيجا من الاستراتيجيات المختلفة، بحيث يستخدم كل واحد منها خلال نسبة معينة من وقت المباراة وذلك سعيا وراء تحقيق هدفه إما بتعظيم مكاسبه إلى أكبر قدر ممكن أو تخفيض خسائره إلى أدنى حد ممكن.

3-2-1- الطريقة الحسابية: تعتمد هذه الطريقة على الخطوات التالية:

- التأكد من أن المباراة هي من نوع (2×2) وأن المباراة غير مستقرة؛
- طرح أكبر قيمة في كل صف من أقل قيمة ووضعها بجانب الصف، وطرح أكبر قيمة في كل عمود من أقل قيمة ووضعها أسفل العمود؛
- استبدال القيم المحسوبة في الصفوف والأعمدة؛
- حساب النسب في الصفوف والأعمدة من خلال حساب حاصل قسمة قيمة الصف أو العمود على مجموع قيم الصف أو العمود.

تمرين:

لدينا مباراة الدفع التالية:

0	-2	7
2	5	6
3	-3	8

المطلوب:

- أوجد الاستراتيجيات المثلى لكل من اللاعب 1 و2 وقيمة المباراة باستخدام الطريقة الحسابية.

الحل:

0	-2	7	-2	
2	5	6	**2**	Max-min
3	-3	8	-3	
3	5	8		
Min-max				

$Max - Min \neq Min - Max$ ومنه المباراة غير مستقرة.

نجد أن قيم العمود الثالث هو أكبر من قيم العمود الأول والثاني لذلك يتم حذفه كما يلي:

0	-2
2	5
3	-3

نجد أن جميع قيم الصف الأول هي أقل من قيم الصف الثاني لذلك يتم حذفه:

2	5
3	-3

وهنا نحصل على مصفوفة (2×2) غير مستقرة يمكن حلها بالطريقة الحسابية كما يلي:

2	5	5-2=3
3	-3	3-(-3)=6
3-2=1	5-(-3)=8	

2	5	6
3	-3	3
8	1	

2	5	6/9=0,67
3	-3	3/9=0,33
8/9=0,89	1/9=0,11	9

الاستراتيجيات المثلى لكل لاعب:

- بالنسبة للاعب A: اللاعب A يتبع الاستراتيجية الأولى بنسبة 67 % والاستراتيجية الثانية بنسبة 33 % خلال زمن المباراة.
- بالنسبة للاعب B: اللاعب B يتبع الاستراتيجية الأولى بنسبة 89 % والاستراتيجية الثانية بنسبة 11 % خلال زمن المباراة.

إيجاد قيمة المباراة:

$$V_1=\left[\left(4\times\frac{2}{5}\right)+\left(-1\times\frac{3}{5}\right)\right]\times\frac{1}{2}+\left[\left(-2\times\frac{2}{5}\right)+\left(3\times\frac{3}{5}\right)\right]\times\frac{1}{2}=0,69$$

$$=\left(\frac{7}{3}\times\frac{8}{9}\right)+\left(\frac{7}{3}\times\frac{1}{9}\right)=\frac{7}{3}=2,33$$

$$V_B=\left[\left(2\times\frac{8}{9}\right)+\left(5\times\frac{1}{9}\right)\right]\times\frac{2}{3}+\left[\left(3\times\frac{8}{9}\right)+\left(-3\times\frac{1}{9}\right)\right]\times\frac{1}{3}$$

$$=\left(\frac{21}{9}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{21}{9}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}=2,33$$

3-2-2- الطريقة الجبرية:

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون المباراة بين لاعبين فقط وكل لاعب له استراتيجيتين، أي عندما تكون مصفوفة المباراة بحجم (2×2) فقط .ولغرض توضيح هذه الطريقة نأخذ المثال التالي :

لو فرضنا أن مصفوفة العائد هي:

		اللاعب B (1)	اللاعب B (2)
اللاعب A	(1)	4	10
	(2)	5	2

وعلى افتراض أن اختيار اللاعب A للاستراتيجية الأولى هو باحتمال P1 والاستراتيجية الثانية باحتمال P2 حيث أن:

P1: هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب A الاستراتيجية الأولى.

P2: هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب A الاستراتيجية الثانية .

وعلى افتراض أن:

$P1 + P2 = 1$.

أي:

$P2 = 1 - P1$ أي نفرض أن اللاعب B سيلعب الاستراتيجية الأولى باحتمال Q1 والاستراتيجية الثانية باحتمال Q2.

Q1: هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب B الاستراتيجية الأولى.

Q2: هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب B الاستراتيجية الثانية.

وعلى افتراض أن:

$Q1 + Q2 = 1$ أي: $Q2 = 1 - Q1$

إذن:

اللاعب B

		Q_1	$1 - Q_1$
اللاعب	P_1	4	10
A	$1 - P_1$	5	2

يتم إيجاد الإستراتيجيات للاعب A من الصيغ الرياضية الآتية:

$$E(A/B=1) = 4P_1 + 5P_2$$

$$E(A/B=2) = 10P_1 + 2P_2$$

$$E(A/B=1) = E(A/B=2)$$

$$4P_1 + 5P_2 = 10P_1 + 2P_2$$

بالتعويض عن P_2

$$4P_1 + 5(1-P_1) = 10P_1 + 2(1-P_1)$$

$$4P_1 + 5 - 5P_1 = 10P_1 + 2 - 2P_1$$

$$P_1 = 1/3$$

$$P_2 = 2/3$$

أي أن اللاعب A سيلعب الإستراتيجية الأولى 1/3 من الوقت المخصص لعب وأنه سيلعب الإستراتيجية الثانية 2/3 من الوقت.

يتم إيجاد الإستراتيجيات للاعب B من الصيغ الرياضية الآتية:

$$E(B/A=1) = 4Q_1 + 10Q_2$$

$$E(B/A=2) = 5Q_1 + 2Q_2$$

$$E(B/A=2) = E(B/A=1)$$

$$4Q1 + 10Q2 = 5Q1 + 2Q2$$

بالتعويض عن Q_2

$$4Q_1 + 10(1-Q_1) = 5Q_1 + 2(1-Q_1)$$

$$4Q_1 + 10 - 10Q_1 = 5Q_1 + 2 - 2Q_1$$

$$Q_1 = 8/9$$

$$Q_2 = 1/9$$

أي أن اللاعب B سيلعب الإستراتيجية الأولى بنسبة 8/9 من الوقت المخصص للعب وأنه سـيلعب الإستراتيجية الثانية بنسبة 1/9 من الوقت.

أما قيمة المباراة (V) فيتم استخراجها بتعويض قيم P_1 أو Q_1 في إحدى الصيغ الأربعة وكالآتي:

$$V= 4P_1 + 5P_2 = 4(1/3) + 5(2/3)$$

$$=14/3$$