المحاضرة الخامسة: نظرية المباريات (01)

1- ماهية نظرية المباريات:

1-1- نشأة وتطور نظرية المباريات:

ويعتبر العالم الفرنسي "إيميل بورال" (Emil Borel) هو الرائد فيما يتعلق باستخدام أفكار نظرية المباريات حيث كان أول من طرح فكرة نظرية الألعاب في عام 1921، كما ساهم العالم الفرنسي " جون فون نيومان" (Jon Von Neuman) عام 1928، حيث قام بتطبيقها في عام 1933 عندما قام بدراسة وتحليل المشكلات الخاصة بالاحتكار الثنائي والمتعدد.

وعلى الرغم من ذلك فإن نظرية المباريات لم تلق الإهتمام الكافي ولم تستخدم بشكل واسع إلا بعد الحرب العالمية الثانية، وبالتحديد في عام 1944 عندما قدم كل من "فون نيومان" و"أوسكار مورجينسترن" كتابهما نظرية وتطبيق المباريات والسلوك الاقتصادي (The Theory And Practice Of Games And Economic Bahavior)، والذي قدما من خلاله منهجا جديدا لحل العديد من المشكلات الناتجة عن التنافس أو الصراع بين عدة أطراف بحيث يحاول كل طرف أن ينهي هذا التنافس أو الصراع لصالحه.

هذا كما ساهم التطور الذي حدث في نموذج البرمجة الخطية عام 1947 في إحداث تطوير سريع وفعال في نظرية المباريات، حيث تم استخدام هذا النموذج في حل بعض المشكلات الخاصة بتطبيق هذه النظرية.

1-2- مفهوم نظرية المباريات استخداماتها:

أ- مفهوم نظرية المباريات:

تعرف نظرية المباريات على أنها عبارة عن تحليل رياضي لحالات تضارب المصالح بغرض الإشارة إلى أفضل الخيارات الممكنة لاتخاذ قرارات في ظل الظروف المعطاة تؤدي إلى الحصول على النتيجة المرغوبة.

ب- استخداماتها:

إن تطبيقات نظرية الألعاب واسعة ومتعددة وقد أشارا صاحبي النظرية " فون نيومان" و"مورغنستين" بأن الأداة الفعالة لنظرية الألعاب يجب أن ترتبط ارتباط وثيق بعلم الاقتصاد ونظرية سلوك المستهلك، وتعتبر النماذج الاقتصادية وخصوصا نموذج اقتصاد السوق، سوق المنافسة الكاملة مكانا مثاليا لاختبار فرضيات نظرية الألعاب، بالإضافة إلى الاستعمال الكثيف لنظرية الألعاب في قسم بحوث العمليات الذي يخوض في مسائل تعظيم الأرباح وتخفيض التكاليف، كما ترتبط نظرية الألعاب ارتباطا وثيقا بعلم الاجتماع وتستخدم على نطاق واسع في السياسة.

كما استخدمت نظرية الألعاب في العلوم الاجتماعية، وفي السلوكيات السياسية والاجتماعية والنفسية.

1-3- أنواع المباريات:

يمكن التمييز بين العديد من أنواع المباريات استنادا إلى بعض المعايير الأساسية وذلك كما يلي:

أ- **حسب عدد المشاركين:** هناك نوعين من المباريات وفقا لعدد المتنافسين وهما:

- المباريات الثنائية؛
- المباريات متعددة الأطراف.

ب- **حسب عدد الاستراتيجيات المعتمدة:** يمكن التمييز بين نوعين أساسين من أنواع المباريات استنادا لعدد الاستراتيجيات المعتمدة، حيث قد تكون المباراة محددة، أو تكون غير محددة.

ج- **حسب الحظ أو المهارة أو كليهما معا:** يمكن التمييز بين ثلاثة أنواع من المباريات استنادا إلى الحظ أو المهارة أو كليهما معا وذلك كما يلي:

- **مباريات الحظ:** تعتبر المباراة مباراة حظ إذا اعتمدت نتيجتها على هذا الحظ وحده دون وجود دخل للمهارة في تحديد هذه النتيجة، مثل: لعبة اليانصيب؛
- **مباريات المهارة:** تعتبر المباراة مباراة مهارة إذا اعتمدت نتيجتها على المهارة وحدها دون وجود للحظ في تحديد هذه النتيجة، مثل: الألعاب الرياضية الفردية؛
- **مباريات الحظ والمهارة معا:** تعتبر المباراة من مباريات الحظ والمهارة معا إذا مزجت بين كل من الحظ والمهارة معا، مثل: عمليات التسويق والمعارك الحربية.

د- حسب النتيجة النهائية لها: يمكن التمييز بين نوعين من المباريات استنادا إلى النتيجة النهائية لها وذلك كما يلي:

- **مباريات صفرية الحصيلة:** طبقا لهذا النوع من المباريات فإن النتيجة النهائية لها تتمثل في أن يكون المجموع الجبري لمكسب وخسارة الطرفين يساوي الصفر، وبالتالي فإن مكسب أحد الأطراف يعد في نفس الوقت خسارة للطرف الآخر، حيث يسعى كل طرف من أطراف المباراة إلى تعظيم مكاسبه إلى أكبر قدر ممكن، أو تدنية خسارته إلى أقل قدر ممكن، وهذا ويتسم هذا النوع من المباريات بوجود المنافسة الشديدة بين الأطراف المتصارعة؛
- **مباريات غير صفرية الحصيلة:** طبقا لهذا النوع من المباريات يكون مكسب أحد الأطراف أكبر أو أقل من خسارة الطرف الآخر، وبالتالي فهو لا يساويه.

2- النمذجة الرياضية لنظرية المباريات:

إن عملية المنافسة والصراع بين اللاعبين سواء كانوا ذات صفة معنوية أو طبيعية يترتب عنه نتائج مالية، ويتم التوصل إليها من خلال تطلعات كل من اللاعب الأول واللاعب الثاني وذلك من خلال تحديد مقدار (a_{ij}) الذي يمثل مصفوفة النتائج المالية الناجمة عن تقاطع رغبات كل من اللاعبين في حالة المنافسة والصراع على مكاسب معينة أو تجنب خسارة أو مخاطرة معينة في السوق أو مواقع عمل، ويتم جمع النتائج في مصفوفة يطلق عليها اسم مصفوفة الدفع (Pay of matrix)، وتفسر البيانات المالية والنقدية في هذه المصفوفة بأنها مقدار ما يدفعه اللاعب الثاني للاعب الأول في حالة فوز الأخير عند اتخاذه قرار معين لاختيار استراتيجية معينة أو بديل معين.

إن الصيغة الرياضية لمصفوفة الدفع في ظل نظرية الألعاب على افتراض أن (i) يمثل قرار اللاعب الأول و(j) يمثل قرار اللاعب الثاني هي على الشكل التالي:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i=1,...,m \\ j=1,...,n \end{cases}$$

حيث أن:

- الاستراتيجيات الممكنة للاعب الأول تمثل الأسطر؛
- الاستراتيجيات الممكنة للاعب الثاني تمثل الأعمدة؛

إن عناصر المصفوفة (a_{ij}) إما أن تكون موجبة أو تكون سالبة، فإذا كانت موجبة فإنها تعبر عن مقدار الربح المتحقق للاعب الأول عند إتباعه استراتيجية (i) في نفس الوقت الذي يتبع فيه اللاعب الثاني استراتيجية (j)، أما إذا كانت سالبة فإنها تعبر عن خسارة اللاعب الأول عند إتباعه الاستراتيجية (i) في نفس الوقت الذي يتبع فيه اللاعب الثاني استراتيجية (j)، وبناء على ما تقدم يمكن صياغة العلاقات الرياضية التالية:

أ- اللاعب الأول (P_1):

- إذا كانت مصفوفة الدفع هي (a_{ij})؛
- إن اللاعب الثاني (j) يسعى إلى تقليل العوائد التي يمكن أن يحصل عليها اللاعب الأول أي أن:

$$\min_{(j)}\left(a_{ij}\right)$$

- إن اللاعب الأول (i) يسعى إلى تعظيم أقل ربح ممكن أن يحصل عليه أي أن:

$$\max_{(i)}\min_{(j)}\left(a_{ij}\right)$$

- إن قيمة اللعبة والمنافسة للاعب الأول هي:

$$\max_{(i)}\min_{(j)}\left(a_{ij}\right)=V_1$$

ب- اللاعب الثاني (P_2):

- إذا كانت مصفوفة الدفع هي (a_{ij}) ؛
- إن اللاعب الأول (i) يسعى إلى تعظيم الخسائر التي يمكن أن تلحق باللاعب الثاني أي أن:
-

$$\max_{(i)}\left(a_{ij}\right)$$

- اللاعب الثاني (j) يسعى إلى تقليل أكبر خسارة يمكن أن تلحق به نتيجة هذه المباراة أو هذا الصراع أي أن:

$$\min_{(j)}\max_{(i)}\left(a_{ij}\right)$$

- إن قيمة اللعبة والمنافسة للاعب الثاني هي:

$$\min_{(j)}\max_{(i)}\left(a_{ij}\right)=V_2$$

- نماذج نظرية المباريات:

تنقسم هذه المباريات طبقا للاستراتيجيات التي يستخدمها كل طرف لتحقيق هدفه سواء كان أقصى مكسب أو أقل خسارة إلى نوعين أساسين وهما: المباريات ذات الاستراتيجية النقية أو الخالصة والمباريات ذات الاستراتيجية المختلطة.

1-3- المباريات ذات الاستراتيجية النقية أو الخالصة أو المطلقة:

طبقا لهذا النوع من المباريات يكون أمام كل طرف استراتيجية واحدة مثلى من بين عدة استراتيجيات متاحة يلعب بها خلال زمن المباراة بغية تحقيق إما أقصى عائد أو أقل خسارة.

يتم التعبير عن مصفوفة الدفع (Pay of matrix) في صورة رقمية تمثل العائد لكل طرف، ويلاحظ على هذه المصفوفة أن الصفوف تمثل استراتيجيات الطرف الأول، بينما تمثل الأعمدة استراتيجيات الطرف الثاني، وبالتالي يكون لكل طرف أكثر من استراتيجية، كما تمثل الأرقام الموجبة في مصفوفة الدفع مكاسب أو عوائد الطرف الأول وتعتبر في نفس الوقت خسائر للطرف الثاني، هذا بينما تمثل الأرقام السالبة خسائر للطرف الأول وتعتبر في نفس الوقت مكاسب للطرف الثاني.

فإذا ظهرت مصفوفة الدفع في شكل قيم موجبة فإنها تكون في صالح الطرف الأول، ومتحيزة ضد الطرف الثاني، بينما إذا ظهرت هذه المصفوفة في شكل قيم سالبة فإنها تكون في صالح الطرف الثاني ومتحيزة ضد الطرف الأول.

وتكون المباراة مستقرة عند نقطة التعادل وذلك عند تساوي Max-Min مع Min-Max، وتحدد قيمة المباراة النهائية بالقيمة المشتركة لهما، أما في حالة عدم تساوي القيمتين فإن المباراة تكون غير مستقرة، وتتحدد قيمتها النهائية من خلال العلاقة التالية:

$$\text{Max-Min} \leq V \leq \text{Min-Max}$$

توجد طريقتان أساسيتان يمكن استخدامهما في تحديد الاستراتيجيات المثلى في المباريات ذات الاستراتيجية النقية أو الخالصة وهما: الطريقة المختصرة وطريقة الحذف (قاعدة السيطرة).

3-1-1- الطريقة المختصرة: يتم تطبيق هذه الطريقة بإتباع الخطوات التالية:

- يتم تحديد أصغر قيمة في كل صف ثم نضعها بجوار المصفوفة؛
- يتم تحديد أكبر رقم من الأرقام الصغرى التي جاءت نتيجة الخطوة السابقة؛
- يتم تحديد أكبر قيمة في كل عمود ثم نضعها في أسفل المصفوفة تحت العمود الخاص بكل منها؛
- يتم تحديد أصغر قيمة من الأرقام الكبرى الناتجة عن الخطوة السابقة؛
- إذا تساوت القيمتين داخل الدائرتين فإنها تعني نقطة التعادل، وهي في نفس الوقت تمثل قيمة المباراة.

ونوضح هذه الطريقة من خلال المثال التالي:

مثال رقم (01):

إذا توفرت لديك بيانات مصفوفة الدفع التالية:

33	-3	27	6
27	18	24	21
12	6	12	18
-6	15	9	-15

المطلوب: باستخدام الطريقة المختصرة:

- التأكد من استقرار المباراة.
- حدد نقطة التعادل.
- حدد قيمة المباراة.

مثال رقم (02):

نفترض أنه لدينا المباراة التالية:

	B			
A	5	5	7	-1
	9	7	5	13

المطلوب:

- هل المباراة مستقرة؟

3-1-2- طريقة الحذف أو قاعدة السيطرة:

من خلال هذه الطريقة يتم حذف بعض الاستراتيجيات (صفوف أو أعمدة) والتي لا تؤثر في قيمة المباراة، حيث لا يوجد أي مبرر للإبقاء عليها أو استخدامها.

ويتم تطبيق طريقة الحذف أو قاعدة السيطرة من خلال إتباع الخطوات التالية:

- إذا كانت أرقام أحد الصفوف أقل من أو تساوي نظائرها في صف آخر، فعندئذ يمكن اعتبار أرقام هذا الصف الأقل استراتيجية، وبالتالي يمكن حذفها من المباراة؛
- إذا كانت أرقام أحد الأعمدة أكبر من أو تساوي نظائرها في عمود آخر، فعندئذ يمكن اعتبار أرقام هذا العمود الأكبر استراتيجية، وبالتالي يمكن حذفها من المباراة.

ولتوضيح هذه الفكرة نأخذ المثال التالي:

مثال رقم (03):

مصفوفة الدفع التالية هي نتيجة لمباراة بين اللاعب الأول (P_1) واللاعب الثاني (P_2):

	P_2		
P_1	7	4	3
	5	-1	2
	4	3	2

المطلوب: باستخدام طريقة السيطرة حدد ما يلي:

- تخفيض مصفوفة المباراة (3×3) إلى مصفوفة (2×2) ؟
- هل المباراة مستقرة ؟
- حساب قيمة المباراة ؟