

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf-Mila

Institut: Mathématiques et Informatique

Département: Mathématiques

L3 Mathématiques/ S6/ 2023-2024

Matière: **Introduction à la théorie des opérateurs linéaires**

### Serie 2: L'espace dual

**Exercice1:**  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. Soit  $A$  un opérateur linéaire fermé tel que:

$$A : D(A) \subset E \rightarrow F \text{ et } \overline{D(A)} = E.$$

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

1-  $D(A) = E$

2-  $A$  borné.

3-  $D(A^*) = F'$ .

4-  $\overline{D(A^*)} = F'$  et  $A^*$  borné; et dans ces conditions  $\|A\| = \|A^*\|$ .

**Exercice2:** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces réels de Banach.

$$A : E \rightarrow F, \text{ avec } \overline{D(A)} = E.$$

Montrer que:

a- Si  $A^{-1}$  existe et appartient à  $\mathcal{L}(F, E)$ , alors  $(A^*)^{-1}$  existe et appartient à  $\mathcal{L}(E', F')$ .

b- Dédurre que  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ .

c- Si  $(A^*)^{-1}$  existe et appartient à  $\mathcal{L}(E', F')$ , alors  $A^{-1}$  existe et appartient à  $\mathcal{L}(F, E)$ .

**Exercice3:** Soit  $C([0; 1])$  l'espace des fonctions continues  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , muni de la norme uniforme.

1- Montrer que  $B = \{f \in C([0; 1]) : f(x) > 0, \forall x \in [0, 1]\}$  est un ouvert convexe de  $C([0; 1])$ .

$$\text{Soit } C = \left\{g \in C([0; 1]) : g\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

2- Montrer qu'il existe une forme linéaire continue  $\Phi$  sur  $C([0; 1])$  et un nombre réel  $a \in \mathbb{R}$  tels que:  $\Phi(f) \geq a \geq \Phi(g)$  pour toute  $f \in B$  et toute  $g \in C$ .

3- Montrer que  $\Phi(f) \geq 0$  pour toute  $f \in B$  (raisonner par l'absurde et remarquer que: si  $f \in B$  alors  $\lambda f \in B$  pour tout  $\lambda > 0$ ).

**Exercice4:** Soit  $E$  un espace vectoriel normé.  $M$  un sous espace vectoriel de  $E$  et soit  $x_0 \notin M$ .

On suppose que  $d = d(x_0, M) > 0$ .

1- Montrer qu'il existe une forme linéaire  $f$  définie sur  $E$  tout entier telle que

$$\langle f, x \rangle = 0, \forall x \in M.$$

$$\langle f, x_0 \rangle = 1.$$

$$\|f\|_{E'} = \frac{1}{d}.$$

**Exercice5:** Soit  $H$  un espace de Hilbert, et  $F$  un sous-espace fermé de  $H$  non réduit à  $\{0\}$ . On note  $P$  la projection orthogonale de  $H$  sur  $F$ . Si  $x$  est un élément de  $H$  on appelle distance de  $x$  à  $F$  la quantité:  $d(x, F) = \inf \{\|x - y\|; y \in F\}$

1- On pose  $x = P(x) + x_1$ , où  $x_1$  est orthogonal à  $F$ . Vérifier que  $d(x, F) = \|x - P(x)\|$ .

2- Prouver que:  $\langle x_1, x_1 \rangle = d(x, F)^2$ , puis que  $\left\langle x, \frac{x_1}{\|x_1\|} \right\rangle = d(x, F)$ .

3- Soit  $y \in F^\perp$ , avec  $\|y\| = 1$ . Prouver que  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x_1\|$ .