المحاضرة الرابعة: نظرية صفوف الانتظار (02)

3- فرضيات النموذج البسيط (النظام البسيط M/M/1):

3-1- إن الفرضية الأولى تعني: أنه إذا كان عدد القادمين في وحدة زمنية هو X وكان بمعدل ثابت λ عندما X يعتبر متغيرا عشوائيا يخضع لقانون توزيع بواسون الذي يعطي ثابته الاحتمالي بالعلاقة:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$X=0, 1, 2\ldots ; \lambda > 0$

وتوقعه الرياضي:

$$E(x) = \lambda$$

- وإذا كانت الفترة الزمنية الفاصلة بين وصول زبون والذي يليه هو T، عندها فإن T يعتبر متغيرا عشوائيا يخضع إلى قانون التوزيع الأسي الذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$g(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad \lambda > 0 \quad t > 0$$

وتوقعه الرياضي:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

3-2- إن الفرضية الثانية تعني: لو كان عدد الزبائن الذين يحصلون على خدمة من النظام في وحدة زمنية هو Y وكانت الخدمة تقدم لهم بمعدل ثابت μ، عندها فإن Y يعتبر متغيرا عشوائيا يخضع في سلوكه لقانون توزيع بواسون الاحتمالي الذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$f(y) = P(Y = y) = \frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!} \qquad \begin{array}{l} y: 0,1,2,3\ldots \\ \mu > 0 \end{array}$$

وتوقعه الرياضي:

$$E(Y) = \mu$$

وإذا كان الزمن الفاصل بين خروج زبون وآخر يليه من النظام هو τ فإن τ متحول عشوائي يخضع في سلوكه لقانون التوزيع الأسي الذي يعطى بالعلاقة:

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad t > 0 \quad \mu > 0$$

وتوقعه الرياضي:

$$E(\tau) = \frac{1}{\mu}$$

كما يمكن حساب الاحتمالات التالية:

أ- احتمال أن لا يتجاوز عدد القادمين X عددا K من خلال العلاقة التالية:

$$P(X \le k) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + \ldots + P(x = k)$$

وذلك لأن توزيع (بواسون) متقطع.

باستخدام التابع الاحتمالي نحصل على:

$$P(X \le k) = \sum_{X=0}^{k} f(X) = \sum_{x=0}^{k} \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!}$$

$$e^{-\lambda}\left[1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!}\right]$$

ب-

بالنسبة للفترة T (الفترة الفاصلة بين وصول زبون وآخر يليه).

نريد أن لا تزيد عن مقدار L فهي تحسب من العلاقة:

$$P(T \le L) = \int_0^L \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^L = -\left[e^{-\lambda L} - 1\right]$$

$$= 1 - e^{-\lambda L}$$

أي:

$$P(T \le L) = 1 - e^{-\lambda L}$$

ج- بالنسبة للزبائن الذين حصلوا على الخدمة إذا كان المطلوب هو ان لا يزيد عدد الزبائن الذين تم خدمتهم Y عن عدد محدد N نحسب ذلك من خلال العلاقة التالية:

$$P(Y \leq N) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + \ldots + P(Y = N)$$

$$P(Y \leq N) = \sum_{Y=0}^{N} \frac{\mu^{Y} e^{-\mu}}{Y!}$$

لأنه توزيع متقطع.

ويكون الاحتمال المعاكس:

$$P(Y > N) = 1 - P(Y \leq N)$$

وبالنسبة للفترة الفاصلة: إذا أردنا أن لا تزيد الفترة الفاصلة بين خدمة زبون وآخر يليه عن مدة قدرها h تحسب من العلاقة:

$$P(\tau > h) = 1 - P(\tau \leq h) = e^{-\mu h}$$

4- تكاليف نظم صفوف الانتظار

تتكون التكلفة الكلية للخدمة (C_t) من تكلفتين أساسيتين وهما: تكلفة تقديم الخدمة (C_S) وتكلفة الانتظار (C_W)، فتكلفة تقديم الخدمة تتكون من التكاليف المباشرة وغير المباشرة التي تستخدمها المؤسسة عند تقديمها للخدمة، وترتبط بعلاقة طردية مع مستوى جودة الخدمة، أي كلما كان في هدف متخذ القرار تحسين مستوى جودة الخدمة ينبغي عليه تحمل تكاليف إضافية كدفع أجور لمقدمي الخدمة الجديدة؛ أما تكلفة الانتظار فهي أيضا مجموع التكاليف المباشرة وغير المباشرة التي تتحملها المؤسسة نتيجة الوقت الذي ينفقه طالب الخدمة في الانتظار، وكلما ارتفعت جودة الخدمة كلما انخفضت هذا التكلفة، أي أنها ترتبط بعلاقة عكسية مع مستوى جودة الخدمة.

ويمكن التعبير عنها بالعلاقة الرياضية التالية:

$$C_t = C_S + C_W$$

5- تحقيق التوازن

لدينا معادلة التكلفة الكلية:

$$C_t = C_w + C_s = C_1\mu + C_2L$$

وبما أن الهدف هو إيجاد معدل خدمة أمثل (μ^*)، في من فيتحتم علينا اشتقاق المعادلة بالنسبة إلى (μ)، أي إيجاد قيمة التغير الذي من الممكن أن يدخل في تحديد وقت معدل تقديم الخدمة (μ).

لدينا:

$$C_T(\mu) = C_1\mu + C_2\left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right)$$

$$\frac{\partial(C_T)}{\partial\mu} = C_1 + C_2\frac{0-\lambda}{(\mu-\lambda)^2}$$

وعندما يؤول هذا التغير إلى الصفر، أي: $\frac{\partial(C_T)}{\partial\mu} \approx 0$

$$C_1 + C_2\frac{0-\lambda}{(\mu-\lambda)^2} \cong 0$$

وتصبح المعادلة كما يأتي:

$$C_1 + C_2\frac{0-\lambda}{(\mu-\lambda)^2} \cong 0$$

أي أن:

$$C_2\frac{0-\lambda}{(\mu-\lambda)^2} = C_1$$

وبهذا يكون معدل الخدمة الأمثل على النحو التالي:

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\lambda\frac{C_2}{C_1}}$$