Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf-Mila
Institut: Mathématiques et Informatique
Département: Mathématiques
L3 Mathématiques/ S6/ 2023-2024
Matière: **Introduction à la théorie des opérateurs linéaires**

Serie 1: L'espace L(X,Y)
PartieIII

Exercice1
Soit l'opérateur linéaire $A : E \to F$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
a) L'equation $Ax = y$ admet une solution unique, pour tout $y \in R(A)$
b) $KerA = \{0\}$
c) A admet un inverse à gauche.

Exercice2 Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
1) La solution de l'equation $Ax = y$ existe, pour tout $y \in F$
2) $R(A) = \Im mA = F$
3) A admet un inverse à droite.

Exercice3 Soit E un espace de Banach, F un espace normé, $A : E \to F$ un opérateur linéaire borné et soient:
a) $\overline{R(A)} = \Im mA = F$.
b)$\exists c > 0 : \|Ax\| \geq c\|x\|$
Montrer que A admet un inverse borné.

Exercice4 Soient E un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E)$ tel que: $\|A\| < 1$.
- Montrer que l'opérateur T tel que: $T = (Id - A)$ admet un inverse borné.

Exercice5 Soient E et F deux espaces de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et admet un inverse borné. Si l'opérateur B vérifie la condition:

$$\|A - B\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

- Montrer que B admet un inverse borné.

Exercice6 E et F deux espaces de Banach. Soit l'opérateur linéaire A de $\mathcal{L}(E, F)$ où A^{-1} existe et est continu. On considère la suite d'opérateurs linéaires $(A_n)_n$ de $\mathcal{L}(E, F)$ dont $A_n \underset{n\to\infty}{\to} A$ - Montrer que A_n admet un inverse continu pour un rang fixé n et que $A_n^{-1} \to A$.