المحور04: الارتباط الذاتي للأخطاء

المحاضرة 04:

1- التعريف بالارتباط الذاتي للأخطاء:

- من بين الشروط الأساسية لتطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية OLS عدم وجود ارتباط ذاتي أو تسلسلي بين حدود الخطأ:

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sigma^2 \qquad i = j$$
$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \qquad i \neq j$$

وفي حالة عدم توفر هذا الشرط سنواجه مشكلة تعرف بالارتباط الذاتي (Autocorrelation).

- يشير الارتباط الذاتي بشكل عام إلى وجود إرتباط بين قيم المشاهدات المتسلسلة لنفس المتغير خلال فترة زمنية معينة.
- في تحليل الانحدار يعبّر عن الارتباط الذاتي بين قيم حدود الخطأ المتتالية، أي:

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) \neq 0 \qquad i \neq j \quad i, j = 1,2, \dots, N$$

وباستخدام المصفوفات (مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة):

$$E(\varepsilon'\varepsilon) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_3) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_N) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & \sigma^2 & E(\varepsilon_2\varepsilon_3) & \dots & E(\varepsilon_2\varepsilon_N) \\ E(\varepsilon_3\varepsilon_1) & E(\varepsilon_3\varepsilon_2) & \sigma^2 & \dots & E(\varepsilon_3\varepsilon_N) \\ . & . & . & \dots & . \\ E(\varepsilon_N\varepsilon_1) & E(\varepsilon_N\varepsilon_2) & E(\varepsilon_N\varepsilon_3) & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

بحيث:

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) \neq 0 \qquad i \neq j$$
$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sigma^2 \qquad i = j$$

ويتضح من هذه المصفوفة أنّ قيم معامل الارتباط بين حدود الخطأ لا تساوي 0، وأنّ الارتباط الذاتي بين حدود الخطأ يأخذ أشكالا مختلفة:

- ✓ فقد يكون الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى (First order autoregressive Process AR(1))، وفي هذه الحالةكل قيمة من قيم حدود الخطأ مرتبطة بالقيمة التي تسبقها فقط، وتأخذ العلاقة الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t} \qquad |\rho| < 1, \quad u_t \sim N(0,\sigma^2)$$

حيث: ε_t حد الخطأ في نموذج الانحدار الخطي المتعدد $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$

ρ: معامل الارتباط الذاتي للأخطاء.

- ✓ قد يكون الارتباط الذاتي من الرتبة الثانية (Second order autoregressive Process AR(2))، وفي هذه الحالةكل قيمة من قيم حدود الخطأ مرتبطة بالقيمتين السابقتين لها، وتأخذ العلاقة الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + u_t} \qquad |\rho| < 1, \quad u_t \sim N(0,\sigma^2)$$

- ✓ وهكذا، قد يكون الارتباط الذاتي من درجات أعلى.

2- أسباب وجود الارتباط الذاتي للأخطاء:

توجد عدة أسباب لظهور الارتباط الذاتي للأخطاء، نذكر من بينها:

- حذف بعض المتغيرات التفسيرية ذات القيم المرتبطة ذاتيا، فمن المعروف أن حذف بعض المتغيرات من نموذج الانحدار يترتب عليه ما يسمى بخطأ الحذف، وهذا ينعكس بدوره في قيم الحد العشوائي. فإذا افترضنا أن المتغير التابع Y_t مرتبط بالمتغيرين X_{2t} و X_{3t}، وأننا اسقطنا بطريق الخطأ المتغير X_{3t} ولم ندرجه في النموذج، فسيتم إلتقاط تأثير المتغير X_{3t} بحد الخطأ أو المتغير العشوائي ε_t، خاصة اذا كان المتغير X_{3t} يمثل سلسلة زمنية عبارة عن امتداد لماضيها القريب، أي X_{3t} يعتمد على X_{3t-1} و X_{3t-2}، هذا ما يؤدي وبشكل قطعي الى ظهور الارتباط بين ε_t و ε_{t-1} و ε_{t-2}.

- سوء توصيف النموذج (Mis- specification)، كأن يرتبط المتغير التابع Y_t بالمتغير X_{2t} بعلاقة تربيعية من الشكل: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t}^2 + \varepsilon_t$، في حين أننا حددنا وقدرنا نموذجا خطيا من الشكل: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \varepsilon_t$ فإننا سنحصل على حدود خطأ توصيف خطي يعتمد في الأساس على X_{2t}^2، فإذا زاد X_{2t} أو تناقص خلال الزمن فإن ε_t ستتصرف بنفس التصرف، محدثة ارتباطا ذاتيا.

- عدم دقة بيانات السلاسل الزمنية، أي الأخطاء المنهجية في قياس بعض متغيرات النموذج.

- طبيعة بيانات السلاسل الزمنية، فمن المعلوم أنّ بعض متغيرات السلاسل الزمنية كالناتج المحلي الإجمالي Gross Domestic Production، الأرقام القياسية للأسعار Price Index Numbers، معدلات البطالة Unemployment وغيرها غالبا ما تتغير معا في فترات الرخاء وفترات الركود الاقتصادي. ولذلك من المتوقع أن نواجه مشكلة الارتباط الذاتي في حالة بناء نموذج يتضمن مثل هذه المتغيرات.

- عدم إدراج المتغير التابع كمتغير مفسر بدرجات تأخير $(Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t)$ في بعض الحالات التي تتطلب ذلك.

3- آثار مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء:

تتمثل أهم الآثار الناتجة عن مشكل الارتباط الذاتي للأخطاء فيمايلي:

- لا يؤثر وجود الارتباط الذاتي على تحيز المعلمات المقدرة بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS)، حيث تبقى هذه المقدرات مقدرات غير متحيزة. كما تبقى متسقة، إلا أنها تفقد خاصية الكفاءة.
- ينتج عن مشكل الارتباط الذاتي صغر حجم الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة بطريقة (OLS)، ما يؤدي إلى:
  - ✓ تضخيم معنوية المعلمات المقدرة، المبالغة في قيمة معامل التحديد.
  - ✓ عدم دقة مجالات الثقة للمعلمات المقدرة، لإعتمادها على الأخطاء المعيارية في حسابها.عدم صلاحية اختباري STUDENT و FISHER، كون تباين المتغير العشوائي المقدر يكون متحيزا نحو الأسفل، وبالتالي تكون تباين المتغير العشوائي أقل من تباينه الفعلي.
  - ✓ يصبح التنبؤ غير دقيق، لاعتماده على التباين المقدر للمتغير العشوائي، حيث يمكن الحصول على تنبؤات أكثر دقة باستخدام طرق أخرى في تقدير النموذج، كطريقة المربعات الصغرى المعممة METHOD OF GENERALIZED LEAST SQUARE (GLS).
  - ✓ تصبح التقديرات حساسة للتقلب من عينة إلى أخرى.

4- طرق الكشف عن ظاهرة الارتباط الذاتي:

للكشف عن وجود هذا المشكل يتعين علينا التمييز بين درجات الارتباط الذاتي كما يلي:

أولا: اختبارات الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى:

للكشف عن الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى هناك العديد من الاختبارات، لعل أهمها ما يلي:

1-1- اختبار DURBIN-WATSON:

يعتبر هذا الاختبار أكثر الاختبارات استخداما في مختلف العينات، حيث توجد اختبارات أخرى أقوى من اختبار DW من الناحية الاحصائية، إلا أنها تكتسب هذه القوة في حالة العينات كبيرة الحجم فقط، لذلك يفضل اختبار DW على الكثير من الاختبارات الأخرى، فضلا على أنه سهل وبسيط الفكرة والتطبيق، مع الاشارة إلى أنه مخصص للكشف عن الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى فقط.

اختبار DW يستخدم لاختبار ثلاث فروض كمايلي:

- وجود ارتباط ذاتي موجب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho > 0 \end{cases}$$

- وجود ارتباط ذاتي سالب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho < 0 \end{cases}$$

- وجود ارتباط ذاتي موجب أو سالب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

إحصائية DW تعطى بالعلاقة التالية:

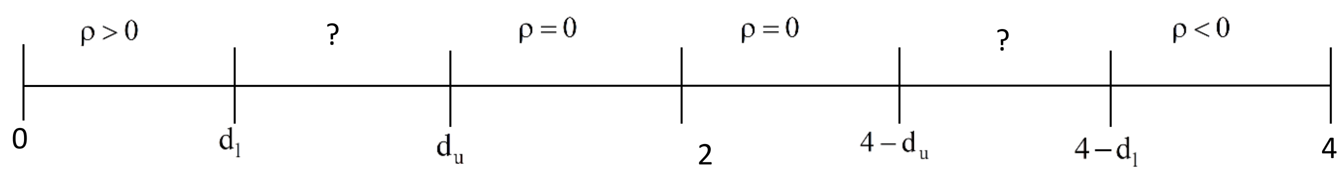
$$DW = \sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n} e_t^2$$

أو إختصارا بـ:

$$DW = 2(1 - \rho)$$

برنامج EViews لتحليل السلاسل الزمنية يقوم بحساب هذه الإحصائية بطريقة أوتوماتيكية. ويبقى على الباحث سوى مقارنة هذه القيمة المحسوبة مع القيمتين الجدوليتين d_L التي تمثل الحد الأدنى لانعدام الارتباط الذاتي، و d_U التي تمثل الحد الأقصى لانعدام الارتباط الذاتي، وذلك حسب عدد المشاهدات n، وعدد المتغيرات التفسيرية في النموذج عند درجة معنوية 5%.

ويتم قبول ورفض الفرضيتين حسب المخطط التالي:



قيمة DW الوسطية هي 2 وعندها ينعدم الارتباط الذاتي، أي: $\rho = 0$.

ويتم قبول ورفض H_0 حسب الحالات التالية:

$0 < DW < d_l$ وجود ارتباط ذاتي موجب.

$d_l < DW < d_u$ مجال غير محسوم، هناك شك في وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي.

$d_u < DW < 4 - d_u$ عدم وجود ارتباط ذاتي.

$4 - d_u < DW < 4 - d_l$ مجال غير محسوم، هناك شك في وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي.

$4 - d_l < DW < 4$ وجود ارتباط ذاتي سالب.

شروط استخدام اختبار DURBIN-WATSON:

هناك عدد من الشروط الواجب توفرها ليكون استخدام هذا الاختبار صحيحا، وهي:

1. الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى فقط، ولا يصلح للكشف عن الارتباط الذاتي من درجة أعلى من الدرجة الأولى.
2. لابد أن يحتوى النموذج على حد ثابت. فإذا كان النموذج لا يحتوي على حد ثابت، فيتعين إعادة تقديره بوجود هذا الحد، للتأكد من وجود أو عدم وجود الارتباط الذاتي للأخطاء.
3. أن لا يظهر المتغير التابع بفترات إبطاء في جملة المتغيرات المستقلة.
4. أن لا توجد مشاهدات مفقودة MISSING OBSERVATIONS سواء في المتغير التابع أو في المتغيرات المستقلة، فمثلا لا يصلح تطبيق هذا الاختبار ولدينا مشاهدات مفقودة لسنة أو سنوات لبيانات سلسلة زمنية.
5. حجم العينة يجب أن يساوي أو يفوق 15 مشاهدة $(n \geq 15)$، لأن القيم الجدولية لهذا الاختبار تبدأ من 15 مشاهدة.

مثال تطبيقي:

البيانات التالية خاصة بتطور كل من الناتج المحلي الإجمالي (GDP) و الواردات (M) في إقتصاد ما بالمليار دينار خلال الفترة 2000-2019 كمايلي:

السنة	الناتج المحلي الاجمالي	الواردات	السنة	الناتج المحلي الاجمالي	الواردات
2000	506	23.2	2010	982.4	58.5
2001	523.3	23.1	2011	1063.4	64
2002	563.8	25.2	2012	1171.1	75.9
2003	594.7	26.4	2013	1306.6	94.4
2004	635.7	28.4	2014	1412.9	131.9
2005	688.1	32	2015	1528.8	126.9

2006	753	37.7	2016	1702.2	155.4
2007	796.3	40.6	2017	1899.5	185.8
2008	868.5	47.7	2018	2127.6	217.5
2009	935.5	52.9	2019	2368.5	260.9

المطلوب:

- ✓ تقدير إنحدار الناتج المحلي الإجمالي على الواردات على إفتراض أن العلاقة خطية.
- ✓ إختبار وجود الارتباط الذاتي من عدمه باستخدام اختبار DW.

الحل:

1- نتائج التقدير:

Dependent Variable: M
Method: Least Squares
Date: 02/25/24 Time: 05:21
Sample: 2000 2019
Included observations: 20

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
GDP	0.126230	0.004365	28.91680	0.0000
C	-56.13319	5.439948	-10.31870	0.0000

R-squared	0.978927	Mean dependent var	85.42000
Adjusted R-squared	0.977756	S.D. dependent var	71.14985
S.E. of regression	10.61147	Akaike info criterion	7.656388
Sum squared resid	2026.861	Schwarz criterion	7.755962
Log likelihood	-74.56388	Hannan-Quinn criter.	7.675826
F-statistic	836.1815	Durbin-Watson stat	0.647239
Prob(F-statistic)	0.000000		

2- اختبار وجود الارتباط الذاتي:

تظهر من نتائج التقدير أن DW = 0.64، بمقارنة هذه القيمة مع القيمتين الجدوليتين لـ d_L و d_U عند حجم عينة $n = 20$ نجد:

$$DW = 0.64 < d_L = 1.20$$

وبذلك يوجد إرتباط ذاتي للأخطاء في هذه البيانات. سوف نقوم بمعالجته (تصحيحه) فيما بعد.

1-2- اختبار h- Durbin لإبطاء المتغير التابع:

كما تم التطرق إليه سابقا، فإن اختبار DW غير قابل للتطبيق عندما يتضمن النموذج إبطاء (تأخير) للمتغير التابع كمتغير تفسيري. فإذا كان النموذج المراد اختباره يأخذ الشكل التالي:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots\cdots + \beta_k X_{kt} + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

فإنه لا يمكننا تطبيق اختبار DW، وعليه صمم DURBIN (1970) إحصائية اختبار يمكن استخدامها لمثل هذا النموذج، وتأخذ هذه الاحصائية الشكل التالي:

$$h = \left(1 - \frac{DW}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1 - n\hat{\delta}^2_{\hat{\gamma}}}}$$

حيث: n عدد المشاهدات، DW: إحصائية DURBIN-WATSON، $\hat{\delta}^2_{\hat{\gamma}}$: التباين المقدر لمعلمة إبطاء المتغير التابع، مع ملاحظة أن هذه الإحصائية في العينات الكبيرة تتبع التوزيع الطبيعي.

6. و الفرضية التي يقوم عليها هذا الاختبار تكون كمايلي:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

7. أما إحصائية الاختبار فهي:

8. $$h = \left(1 - \frac{DW}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1 - n\hat{\delta}^2_{\hat{\gamma}}}}$$

- **قرار الاختبار:** من خلال مقارنة الاحصائية h بالقيم الحرجة (في العينات الكبيرة وعند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ تكون القيمة الحرجة $Z = \pm 1.96$):

✓ نرفض H_0 إذا كان $|h| \geq 1.96$، أي وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء.

✓ نرفض H_1 إذا كان $|h| < 1.96$، أي عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء.

مثال تطبيقي (نفس المثال السابق): مع افتراض وجود فترة تأخير (إبطاء) في المتغير التابع وإدراجها كمتغير مستقل في النموذج:

1- نتائج التقدير:

Dependent Variable: M
Method: Least Squares
Date: 02/25/24 Time: 05:23
Sample (adjusted): 2001 2019
Included observations: 19 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
M(-1)	0.692369	0.197459	3.506388	0.0029
GDP	0.054502	0.021242	2.565810	0.0207
C	-26.93617	10.10539	-2.665526	0.0169

R-squared	0.989213	Mean dependent var	88.69474
Adjusted R-squared	0.987865	S.D. dependent var	71.53424
S.E. of regression	7.880195	Akaike info criterion	7.110522
Sum squared resid	993.5596	Schwarz criterion	7.259644
Log likelihood	-64.54996	Hannan-Quinn criter.	7.135759
F-statistic	733.6457	Durbin-Watson stat	2.392572
Prob(F-statistic)	0.000000		

2- اختبار الارتباط الذاتي: نستعمل في هذه الحالة اختبار h- Durbin:

برنامج EViews لايوفر هذا الاختبار، ولكنه بسيط ويمكن حسابه من خلال نتائج التقدير، كمايلي:

$$h = \left(1 - \frac{DW}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1 - n\hat{\sigma}_y^2}} = \left(1 - \frac{2.392572}{2}\right)\sqrt{\frac{19}{1 - 19(0.197459)^2}} = -0.83$$

القرار:

نرفض H_1 إذا كان $|h| < 1.96$ ، أي عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء، وهو ما ينطبق على حالتنا هذه، أي لا يوجد إرتباط ذاتي للأخطاء.

ثانيا: اختبارات الارتباط الذاتي من الدرجة الأعلى:

من بين الاختبارات التي تستخدم للكشف عن الارتباط الذاتي من درجة أعلى نجد مايلي:

1-2- اختبار BREUSCH-GODFREY للارتباط التسلسلي

نظرا للعيوب الناتجة عن اختبار DURBIN-WATSON طور كل من BREUSCH (1978) وGODFREY (1978) اختبار LM ، والذي يتميز بكونه يسمح باختبار الارتباط الذاتي لدرجات مختلفة، حيث أن الارتباط الذاتي من الدرجة K يمكن صياغته وفق العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \rho_k\varepsilon_{t-k} + u_t}$$

بالتعويض في النموذج الخطي المتعدد نجد:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2X_{2t} + \cdots + \beta_kX_{kt} + \boldsymbol{\rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \rho_k\varepsilon_{t-k} + u_t}$$

وتكون فرضية استقلالية الأخطاء (عدم وجود ارتباط ذاتي) كمايلي:

$$H_0;\ \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = 0$$

في مقابل الفرضية البديلة:

$$H_0;\ \rho_1 \neq \rho_2 \neq \cdots \neq \rho_k \neq 0$$

9. إحصائية هذا الاختبار تعتمد على مضاعف لاغرانج والتي تكون مساوية إلى:

$$LM = n \cdot R^2$$

10. الاحصائية LM تتبع توزيع $khi-deux$ بدرجة حرية K.

- **القرار:**

✓ إذا كانت $LM \geq \chi_k^2$ عند مستوى معنوية معين، فإننا نقبل الفرضية H_1، أي وجود إرتباط ذاتي.

✓ إذا كانت $LM < \chi_k^2$ عند مستوى معنوية معين، فإننا نقبل الفرضية H_0، أي لا يوجد إرتباط ذاتي.

مثال تطبيقي: نفس المثال السابق:

اختبر فرضية وجود ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة الثانية، بشرط استخدام اختبار BREUSCH-GODFREY للارتباط التسلسلي.

الحل:

نستخدم التعليمة التالية:

$$Table\ Estimation\ \rightarrow View \rightarrow Residual\ Diagnostics \rightarrow Serial\ Correlation\ LM\ test \rightarrow lags\ to\ include\ [2] \rightarrow ok$$

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:
Null hypothesis: No serial correlation at up to 2 lags

F-statistic	5.659529	Prob. F(2,16)	0.0138
Obs*R-squared	8.286565	Prob. Chi-Square(2)	0.0159

Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Date: 02/25/24 Time: 05:59
Sample: 2000 2019
Included observations: 20
Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
GDP	0.004483	0.003876	1.156721	0.2644
C	-4.198297	4.659603	-0.900999	0.3810
RESID(-1)	0.554432	0.259296	2.138223	0.0483
RESID(-2)	0.284236	0.275287	1.032506	0.3172

R-squared	0.414328	Mean dependent var	-1.42E-15
Adjusted R-squared	0.304515	S.D. dependent var	10.32845
S.E. of regression	8.613489	Akaike info criterion	7.321392
Sum squared resid	1187.075	Schwarz criterion	7.520539
Log likelihood	-69.21392	Hannan-Quinn criter.	7.360268
F-statistic	3.773019	Durbin-Watson stat	1.779014
Prob(F-statistic)	0.031944		

ويتضح من خلال نتائج الاختبار، أنّ هذا الاختبار على برمجية EVIEWS يقوم ببناءنموذج إنحدار البواقي على الناتج المحلي الإجمالي والبواقي المبطأة بفترتين متتاليتين (كما هو مبين في الجزء السفلي). ومن نتائج النموذج في الجزء العلوي، جاءت قيمة إحصائية $LM = n\,R^2 = 8.286565$. أما القيمة الجدولية لـ مربع كاي بدرجة واحدة عند مستوى معنوية 5% فهي: $\chi_1^2 = 3.83$. وبذلك: $LM > \chi_1^2$ وبالتالي نقبل الفرضية H_1، أي وجود إرتباط ذاتي تسلسلي من الدرجة الثانية.

3-1- اختبار $\mathbf{Ljung - Box}$:

- هو اختبار إحصائي يستخدم في التحقق من وجود الارتباط الذاتي في سلسلة زمنية. يُستخدم اختبار Ljung-Box على نطاق واسع في الاقتصاد القياسي وفي المجالات الأخرى التي تكون فيها بيانات السلاسل الزمنية شائعة. يعتمد هذا الاختبار في حسابه على شكل بياني يسمى Correlogram (معاملات الارتباط الذاتي بين البواقي مع فجوات زمنية).
- يقوم هذا الاختبار باختبار الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0; & \left(\text{لا يوجد ارتباط تسلسلي}\right) \text{البواقي مستقلة} \\ H_1; & \left(\text{يوجد ارتباط تسلسلي}\right)\text{البواقي مترابطة} \end{cases}$$

- تعطى احصائية الاختبار بالصيغة التالية:

$$\boldsymbol{Q - Stat = n(n+2)\frac{\sum_{k=1}^{h}\widehat{\rho}_k^2}{n-k}}$$

حيث: n: حجم العينة، h: عدد التأخيرات التي نريد اختبارها، $\hat{\rho}$ الارتباط الذاتي في الفترة k.

- تتبع إحصائية Ljung- Box توزيع مربع كاي بدرجة حرية h.

$$\boldsymbol{Q - Stat} \sim \chi_h^2$$

- القرار: نرفض الفرضية H_0 إذا كان $\boldsymbol{Q - Stat} > \chi_h^2$، أي يوجد ارتباط ذاتي للأخطاء (ارتباط تسلسلي).

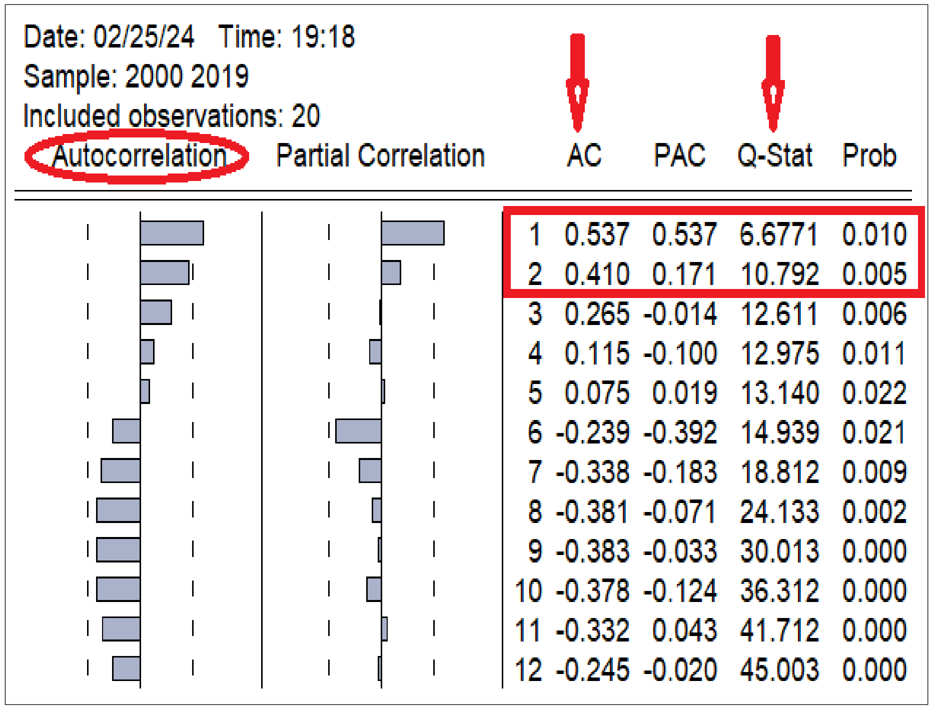
مثال تطبيقي: (نفس المثال السابق):

اختبر فرضية وجود الارتباط الذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى والثانية باستخدام اختبار Ljung-Box.

الحل:

نستخدم التعليمة التالية:

$$Table\ Estimation \rightarrow View \rightarrow Residual\ Diagnostics \rightarrow Correlogram - Q - statistics \rightarrow ok$$



Date: 02/25/24 Time: 19:18
Sample: 2000 2019
Included observations: 20

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.537	0.537	6.6771	0.010
		2	0.410	0.171	10.792	0.005
		3	0.265	-0.014	12.611	0.006
		4	0.115	-0.100	12.975	0.011
		5	0.075	0.019	13.140	0.022
		6	-0.239	-0.392	14.939	0.021
		7	-0.338	-0.183	18.812	0.009
		8	-0.381	-0.071	24.133	0.002
		9	-0.383	-0.033	30.013	0.000
		10	-0.378	-0.124	36.312	0.000
		11	-0.332	0.043	41.712	0.000
		12	-0.245	-0.020	45.003	0.000

$$\boldsymbol{Q-Stat = n(n+2)\frac{\sum_{k=1}^{h}\hat{\rho}_k^2}{n-k}}$$

✓ اختبار الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى:

- القيمة المحسوبة:

$$\Rightarrow \boldsymbol{Q-Stat = 6.6771 = 20(22)\frac{(0.537)^2}{19}}$$

- القيمة الجدولية عند مستوى معنوية 5%:

$$\chi_h^2 = \chi_1^2 = 3.841$$

- القرار: القيمة المحسوبة أكبر من الجدولية، وبالتالي نرفض الفرضية الصفرية، أي أنه يوجد إرتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى.

✓ اختبار الارتباط الذاتي من الدرجة الثانية:

- القيمة المحسوبة:

$$\Rightarrow \boldsymbol{10.792 = 20(22)\frac{(0.537)^2+(0.410)^2}{18}}$$

- القيمة الجدولية عند مستوى معنوية 5%:

$$\chi_h^2 = \chi_2^2 = 5.991$$

- القرار: القيمة المحسوبة أكبر من الجدولية، وبالتالي نرفض الفرضية الصفرية، أي أنه يوجد إرتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة الثانية.

وما يدعم قرار وجود إرتباط ذاتي للأخطاء هو أن قيم معاملات الارتباط الذاتي تتناقص ببطء وتقترب من 0 بزيادة طول الفجوات.