Semestre: 4

Unité d'enseignement: UEF 2.2.2

Matière 2: Résistance des matériaux

VHS: 45h00 (Cours: 1h30, TD: 1h30)

Crédits: 4

Coefficient: 2

Objectifs de l'enseignement:

Connaitre les méthodes de calcul à la résistance des éléments des constructions et déterminer les variations de la forme et des dimensions (déformations) des éléments sous l'action des charges.

Connaissances préalables recommandées:

Analyse des fonctions ; Mécanique rationnelle.

Contenu de la matière:

Chapitre 1 : Introductions et généralités

Chapitre 2 : Traction et compression

Chapitre 3 : Cisaillement

Chapitre 4 : Caractéristiques géométriques des sections droites

Chapitre 5 : Torsion

Chapitre 6 : Flexion plane simple

Mode d'évaluation:

Contrôle continu : 40 % ; Examen final : 60 %.

Chapitre1 : Introduction et généralités

I.1. Introduction

La résistance des matériaux (RDM) est la science de l'étude du comportement (déformations, déplacements, contraintes) des solides considérés comme déformables sous l'action de charges extérieures. Elle s'intéresse particulièrement au dimensionnement et à la vérification des pièces (résistance, stabilité, rigidité, etc…) afin qu'elles résistent sans dommage à toutes les forces auxquelles elles seront soumises pendant leur service dans des conditions de sécurité satisfaisantes et au meilleur coût.

I.2. Définition d'une poutre :

On appelle poutre le solide engendré par une surface (S) (figureI.1) dont le centre de gravité décrit une courbe appelée fibre moyenne

La poutre est dite :

- Plane si sa fibre moyenne est totalement contenue dans un plan.
- Gauche si sa fibre moyenne suit une courbe gauche.
- Droite si sa fibre moyenne est une droite.
- A section constante ou variable selon que l'aire S est constante ou variable le long de la fibre moyenne (figure I.2)

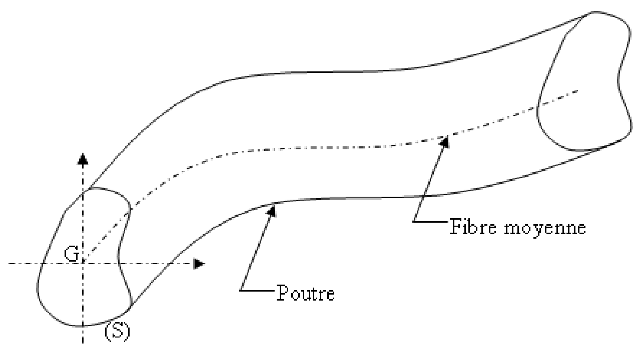


Figure I.1: Une poutre

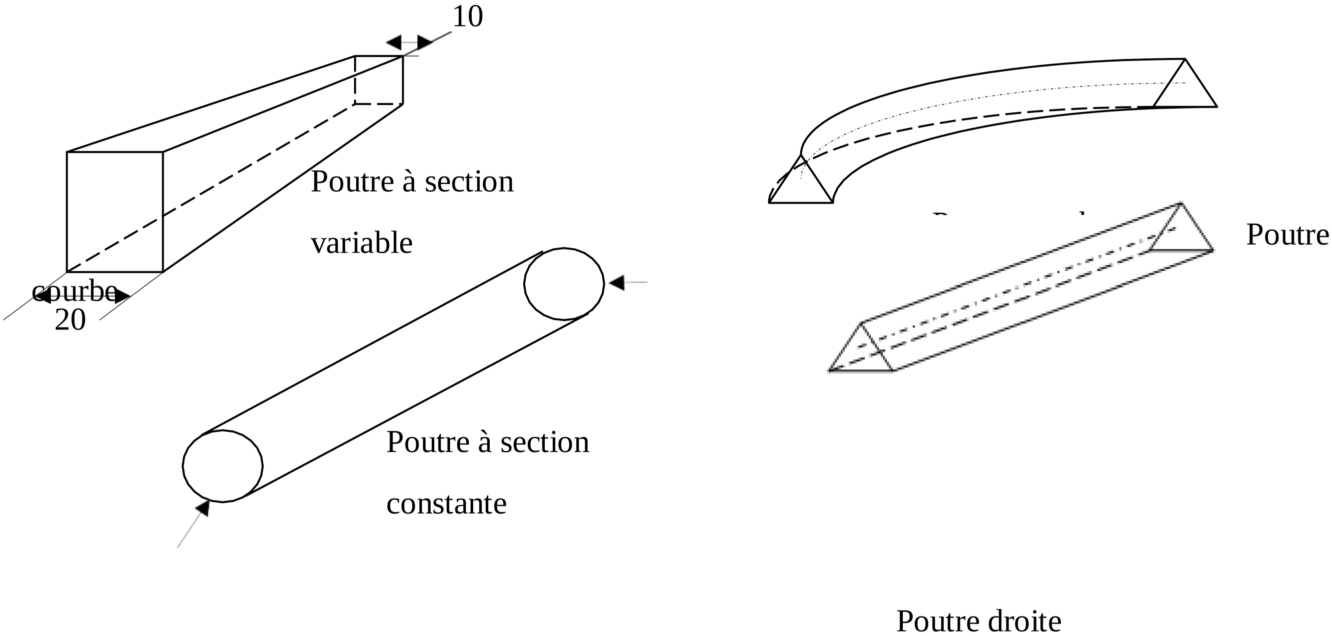


Figure I.2 : cas particuliers

I.3. Hypothèses

La RDM impose pour son utilisation correcte des hypothèses simplificatrices concernant la géométrie et les matériaux des objets étudiés.

Ces hypothèses permettent de réduire la complexité des développements mathématiques tout en conservant une certaine généralité. Ces hypothèses de base concernent la continuité, l'homogénéité, l'isotropie, les déformations et les forces internes du matériau étudié.

- <u>Homogénéité, isotropie et continuité du matériau</u> : on suppose que le matériau a les mêmes propriétés élastiques en tous les points du corps, dans toutes les directions et que le matériau est assimilé à un milieu continu (pas de défaut macroscopique tels que fissures, criques).

- <u>Elasticité linéaire du matériau</u> : On suppose qu'en chaque point, les contraintes et déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initiale.

<u>Déformations</u> : Les déformations ont une influence négligeable sur la position des points d'application ou sur la direction des forces extérieures.

<u>Forces internes</u> : Aucune force interne n'agit dans le matériau avant l'application des charges externes (état initial).

En plus des hypothèses citées, les solides étudiés doivent vérifier les hypothèses supplémentaires suivantes : - Hypothèses de Navier-Bernoulli Les sections droites planes le long de la fibre moyenne doivent rester planes après déformation.

- Principe de Saint-Venant Les résultats obtenus par un calcul RDM ne s'appliquent qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des forces concentrées et des liaisons.

- Hypothèses des petites déformations Les déformations doivent être faibles devant les dimensions de la poutre.

I.4. Loi fondamentale de l'équilibre :

Pour qu'un corps solide indéformable soit en équilibre sous l'action de plusieurs forces, il faut et il suffit que :

- La somme géométrique de toutes les forces soit nulle $\sum \vec{F} = \vec{0}$ (équation vectorielle).
- Le moment résultant par rapport à un point quelconque soit nul $\sum \vec{M/pt} = \vec{0}$.

Finalement, les conditions d'équilibre du solide s'écrivent analytiquement comme suit :

$\sum F/x = 0.$

$\sum F/y = 0.$

$\sum MF/o = 0.$

Ce sont les équations universelles fondamentales d'équilibre.

I.5. Notion de force extérieure :

* Forces extérieures : On appelle forces extérieures toutes forces appliquées sur un système donné.

* Définition statique : une force est une cause capable de maintenir un corps au repos ou de le déformer.

* Définition dynamique : une force est une cause capable de provoquer ou de modifier le mouvement d'un corps.

I.6/ Charges appliquées (forces extérieures) :

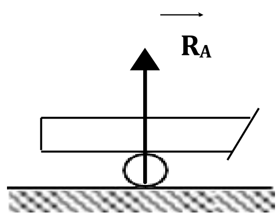
Une poutre est soumise à des charges extérieures qui peuvent être :

- Concentrées en un point : elles peuvent être centrées (fig.I.4-a) ou excentrées (fig.I.4- b).
- Réparties sur un tronçon (fig.I.4-c) ou sur toute la longueur de la poutre (fig.I.4-d).
- Des moments.
- La charge répartie q se mesure par unité de force sur unité de longueur (t/m, kN/m, etc). - Dans les calculs, la charge répartie q est remplacée par sa résultante $\vec{R}$ qui est égale numériquement à l'aire de son diagramme et son point d'application se trouve au niveau du centre de gravité de celui-ci. - Pour une charge uniformément répartie, le diagramme est rectangulaire, sa résultante $\vec{R}$ est égale à l'aire du rectangle ; soit : $\vec{R}$ = q×a et son point d'application se trouve à a/2 (centre de gravité du rectangle).

I.7. Les reactions

Les poutres étudiées sont reliées à l'extérieur par des liaisons appelées appuis, au droit de ses appuis apparaissent des réactions. Les réactions et les charges exercées constituent un système de forces en équilibre.

La classification des appuis se fait d'après le nombre de degrés de liberté (ddl) (c'est-à-dire les possibilités de mouvement) qu'ils laissent à la poutre et d'après la nature des réactions qu'ils peuvent exercer sur la poutre. En plan, on distingue trois types d'appuis :



Appui simple A

a) L'appui simple

L'appui simple se caractérise par : 2 degrés de liberté et 1composante de réaction.

Les deux degrés de liberté sont:

- La rotation autour de l'appui,
- La translation parallèlement au support de l'appui.

La réaction est connue par son point d'application (point de contact du système avec l'appui) et par sa direction (elle est perpendiculaire au support). Seule l'intensité reste à déterminer.

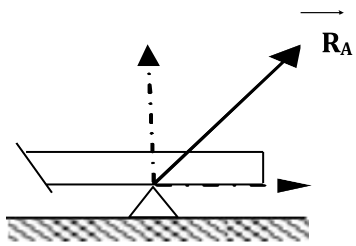
b) L'appui double

L’appui double ou articulation se caractériser par : 1 degré de libertéet deux composantes de réaction.

Le degré de liberté est:

- La rotation autour de l'appui,

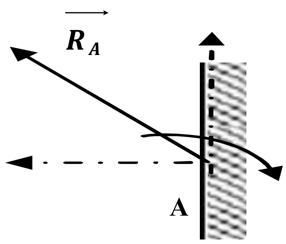
La réaction de l'appui est connue uniquement par son point d'application, le point de contact du système avec l'appui. La réaction est décomposée suivant deux directions perpendiculaires et les deux composantes sont à déterminer.



c) L'encastrement

L’encastrement est caractérisé par : aucun degré de liberté et troiscomposantes de réaction :

- Deux composantes suivant deux directions perpendiculaires et passant par A,
- Un couple appliqué en A



I.8. Torseur de cohésion ou efforts de cohésion (efforts intérieurs)

I.8.1. Définition :

On appelle force intérieure tout effort se trouvant entre les particules d’un corps. Ces forces tendent à s’opposer aux éventuelles déformations du corps dues aux forces extérieures. En résistance des matériaux, les forces intérieures qui apparaissent suite à l’application de forces extérieures s’appellent efforts internes. On distingue les efforts internes suivants :

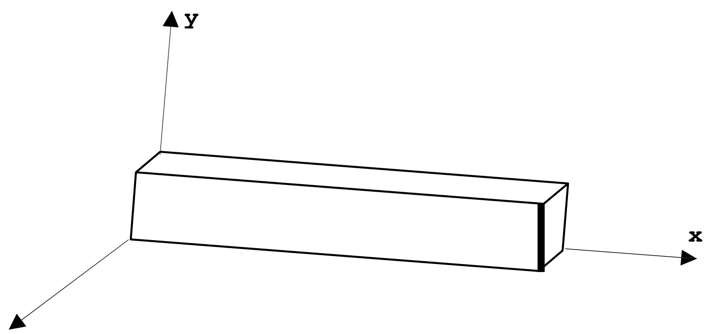
• Effort normal (N) : c'est la somme algébrique des projections sur la normale de la section de toutes les forces extérieures situées d'un même côté de la section considérée.

• Effort tranchant (T) : c'est la somme géométrique des projections, sur le plan de la section de toutes les forces extérieures situées d'un même côté de la section.

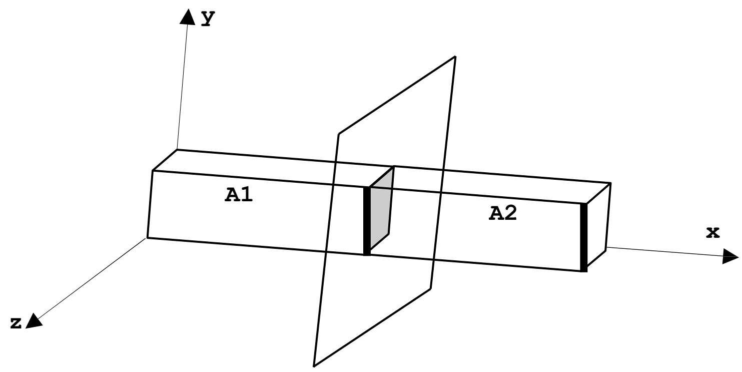
• Moment de torsion (Mt) : c'est la somme géométrique des moments par rapport à la normale à la section au centre de gravité de toutes les forces extérieures situées d'un même côté.

• Moment de flexion (Mf) : c'est la somme géométrique des projections, sur le plan de la section, des moments pris par rapport au centre de gravité des forces extérieures situées d'un même côté de la section

Considérons une poutre en équilibre sous l'effet d'efforts extérieurs.



Effectuons virtuellement une coupure dans cette poutre et analysons l'équilibredes deux tronçons obtenus.



Les tançons A1 et A2 exerçaient l'un sur l'autre des actions qui maintenaient la cohésion entre les deux parties. Ces actions peuvent être représentées par un torseur appelé torseur des efforts intérieurs ou torseur de cohésion $\left\{ \tau_i \right\}$.

Pour rendre compte de ce torseur choisissons une convention de signe : $\left\{ \tau_i \right\} = \left\{ \tau_{(A2 \to A1)} \right\} = -\left\{ \tau_{(A1 \to A2)} \right\}$

Avec : $\left\{ \tau_{(A2 \to A1)} \right\}$ le torseur des efforts exercés par la partie A2 sur la partie A1 et

$\left\{ \tau_{(A1 \to A2)} \right\}$ le torseur des efforts exercés par la partie A1 sur la partie A2.

Exprimons ce torseur en utilisant le principe fondamental de la statique. Appliquons ce principe au tronçon A1 : $\left\{ \tau_{(Aext \to A1)} \right\} + \left\{ \tau_{(A2 \to A1)} \right\} = \left\{ 0 \right\}$ ou $\left\{ \tau_{(Aext \to A1)} \right\} + \left\{ \tau_i \right\} = \left\{ 0 \right\}$

Avec $\left\{ \tau_{(Aext \to A1)} \right\}$ le torseur des efforts extérieurs sur le tronçon A1.

On déduit de ça que $\{\tau_i\} = -\{\tau_{(Aext\rightarrow A1)}\}$

Le même principe appliqué au tronçon A2 donne : $\{\tau_i\} = \{\tau_{(Aext\rightarrow A2)}\}$

I.8.2. COMPOSITION DU TORSEUR DE COHESION

La liaison entre le tronçon A1 et A2 est supposée parfaite elle est donc modélisé par un encastrement. Le torseur de cohésion prend alors la forme la plus générale:

$$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_f \end{Bmatrix}$$

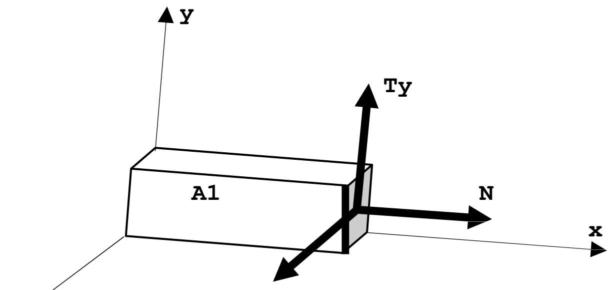
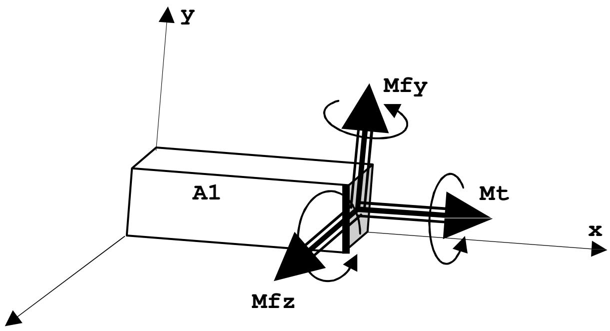


Fig.3a



Avec :

- N, effort normal : force de direction tangente à la courbe moyenne ;
- T, effort tranchant : force perpendiculaire à la courbe moyenne et provoquant un cisaillaient:
    - T_y : effort tranchant selon y,
    - T_z : effort tranchant selon z ;
- M_f, moment fléchissant : moment dont le vecteur est perpendiculaire à lacourbe moyenne et provoquant une flexion :
    - M_{fy} : moment fléchissant selon y,
    - M_{fz} : moment fléchissant selon z ;
- M_t, moment de torsion : son vecteur a pour direction x.

I.8.3. Cas particuliers du torseur de cohésion

Dans la pratique, le tenseur de cohésion est plus simple car plusieurs de ses composantes sont nulles, on est alors en présence de sollicitations élémentaires qui seront traitées en détail dans les chapitres suivants et dont on présente ci-après un résumé.

Torseur de cohésion	***Nature des sollicitations***	***Valeurs des composantes***			
		Effort Normal	***Effort Tranchant***	***Moment de Torsion***	***Moment de Flexion***
$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Traction (N>0) Compression (N<0)	**N≠0**	$T_y=0$ $T_z=0$	$M_t=0$	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$
$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$	Cisaillement simple	N=0	$\mathbf{T_y \neq 0}$ **ou/et** $\mathbf{T_z \neq 0}$	$M_t=0$	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$
$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	Torsion simple	N=0	$T_y=0$ $T_z=0$	$\mathbf{M_t \neq 0}$	$M_{fy}=0$ $M_{fz}=0$
$\{\tau_i\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$	Flexion pure	N=0	$T_y=0$ $T_z=0$	$M_t=0$	$\mathbf{M_{fy} \neq 0}$ ou/et $\mathbf{M_{fz} \neq 0}$

I.9. Diagrammes

Le torseur de cohésion est modifié lorsque la coupure se déplace le long de la poutre. On étudie alors plusieurs coupures en particulier lorsqu'on rencontre : une discontinuité d'ordre géométrique (changement de direction de la ligne moyenne) ou une discontinuité liée à des efforts concentrés ou à une liaison. Le tracé des différentes valeurs prises par une composante du torseur de cohésion le long de la lige moyenne de la poutre en fonction de la position de la coupure est appelé diagramme. Le tracé des diagrammes permet de localiser les sections les plus sollicitées de la poutre et par conséquent de dimensionner la poutre pour résister aux efforts extérieurs, c'est l'un des objectifs de la RDM.