Rappels mathématiques sur les nombres complexes (NC)

1.2 Représentation algébrique d'un nombre complexe NC

Soit un nombre complexe (forme algébrique):

$$z = a + jb$$

$a = Re(z)$: la partie réelle de z ;

$\mathrm{b} = \mathrm{Im}(\mathrm{z})$: la partie imaginaire de z.

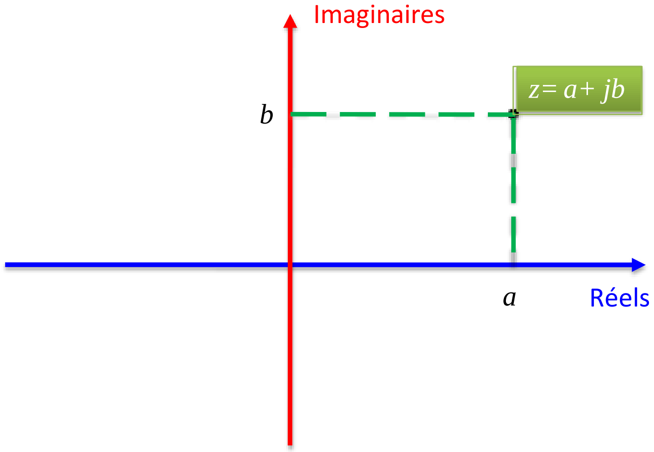


Figure 1.1 Représentation cartésienne d'un nombre complexe (z).

Module de z est le réel positif :

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argument de $z(z \neq 0)$ est le nombre θ défini à $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ avec :

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{b}{r} \\ \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \theta = tang^{-1}\left(^{b}/_{a}\right) \end{cases}$$

1.2 Représentation trigonométrique d'un NC

La forme trigonométrique de z est :

$$z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$$

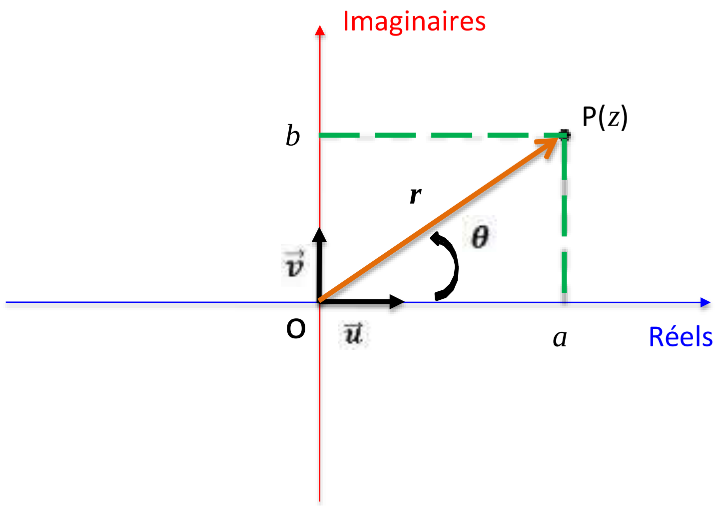


Figure 1.2 Représentation trigonométrique d'un nombre complexe (z).

1.3 Représentation polaire d'un NC

Soit un nombre complexe $z(z \neq 0)$, avec r, θ le module et l'argument respectivement. La représentation polaire est donnée sous la forme suivante :

$$z = [r, \theta]$$

1.4 Représentation exponentielle d'un NC

La formule d'Euler relie l'exponentielle complexe avec le cosinus et le sinus dans le plan complexe :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

1.5 Formule de Moivre

La puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe z, est donnée la formule de Moivre :

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

6. Opérations sur les NC

1. Complexe conjugué

Soit un nombre complexe : $z = a + jb$

Le complexe conjugué de z, noté $\bar{z}$:

$$\bar{z} = a - jb$$

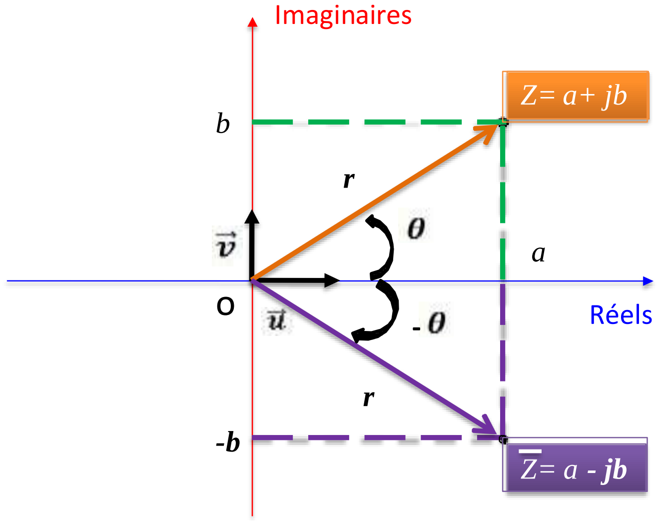


Figure 1.3 Complexe conjugué.

1.6.2 Addition

Soient deux nombres complexes z et $\acute{z}$, avec :

$z = a + jb$ et $\acute{z} = \acute{a} + j\acute{b}$

Alors,

$$z + \acute{z} = (a + \acute{a}) + j(b + \acute{b})$$

1.6.3 Produit

$$z * \acute{z} = (a + jb) * (\acute{a} + j\acute{b})$$

$$= (a\acute{a} - b\acute{b}) + j(a\acute{b} + \acute{a}b)$$

Pour le produit, Il est souvent plus intéressant d'utiliser la forme polaire.

$$\begin{cases} z = [r_1, \theta_1] \\ \acute{z} = [r_2, \theta_2] \end{cases}$$

Le produit de ces deux nombres sous la forme polaire est alors :

$$z * \acute{z} = [(r_1 * r_2), (\theta_1 + \theta_2)]$$

1.6.4 Division

Le calcul de la division de deux nombres complexes z et $\acute{z}$ sous la forme algébrique fait appel au conjugué du dénominateur.

$$\frac{a+jb}{\acute{a}+j\acute{b}} = \frac{(a+jb)\times(\acute{a}-j\acute{b})}{(\acute{a}+j\acute{b})\times(\acute{a}-j\acute{b})} = \frac{(a\acute{a}+b\acute{b})+j(\acute{a}b-a\acute{b})}{\acute{a}^2+\acute{b}^2}$$

Pour la division, Il est souvent plus intéressant d'utiliser la forme polaire.

$$\begin{cases} z = [r_1, \theta_1] \\ \acute{z} = [r_2, \theta_2] \end{cases}$$

$$\frac{z}{\acute{z}} = \frac{[r_1, \theta_1]}{[r_2, \theta_2]} = \left[\frac{r_1}{r_2}, (\theta_1 - \theta_2)\right]$$

2

Rappels sur les lois fondamentales de l'électricité en régime alternatif

1. Régime alternatif

En **régime alternatif**, les grandeurs **courant et tension sont variables avec le temps**.

1. Dipôle électrique

Un dipôle électrique est un composant unique ou un ensemble de composants, connectés à deux bornes.

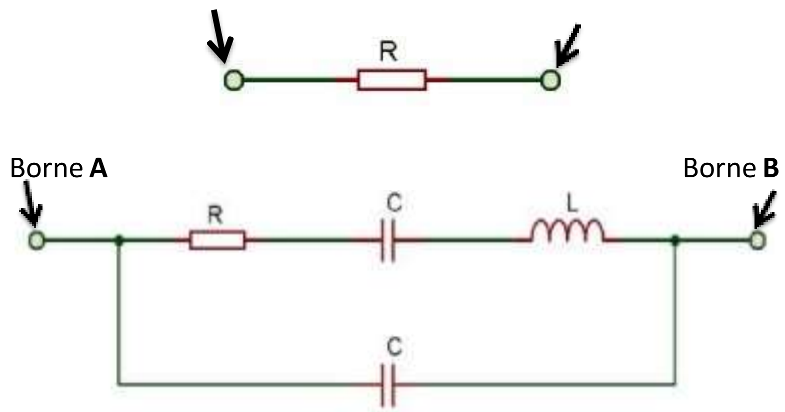


Figure 2.1 Dipôles électriques.

On y place un sens pour le courant.

- ✓ **Convention récepteur** : le courant i et la tension u sont orientés en sens opposés.

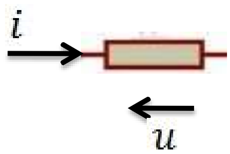


Figure 2.2 Convention récepteur.

- ✓ **Convention générateur** : le courant i et la tension u sont orientés dans le même sens.

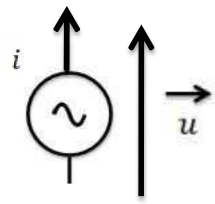


Figure 2.3 Convention générateur.

On classe les dipôles, en deux (02) catégories :

- Dipôle passif : C'est un dipôle qui consomme de l'énergie électrique et ne comporte aucune source d'énergie. On peut citer par exemples : une résistance, une inductance, une ampoule.

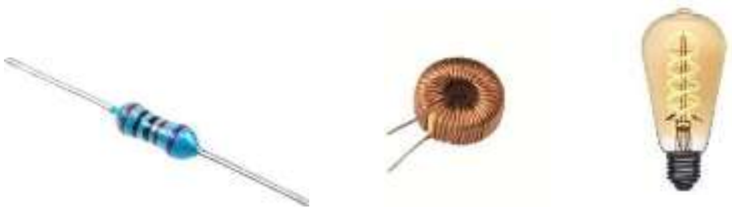


Figure 2.4 Dipôles passifs.

- Dipôle actif : C’est un dipôle qui comporte une source d’énergie. Par exemple, on peut citer : une pile, un moteur électrique à courant continu.

Figure 2.5 Dipôles actifs.

2.1.2 Association de dipôles

Dans un circuit électrique, les dipôles peuvent être associés en série ou en parallèle. Ces deux associations ont des avantages et aussi inconvénients.

1. Dipôles en série

Les dipôles sont associés en série lorsqu’ils sont branchés les uns à la suite des autres.

Le courant i est commun à tous les dipôles.

La tension u est la somme des tensions aux bornes de chaque dipôle.

2. Dipôles en parallèle

La tension est commune à tous les dipôles.

Le courant total est la somme des courants aux bornes de chaque dipôle.

2.1.3 Association de dipôles élémentaires

1. Association des résistances (R)

1. En série

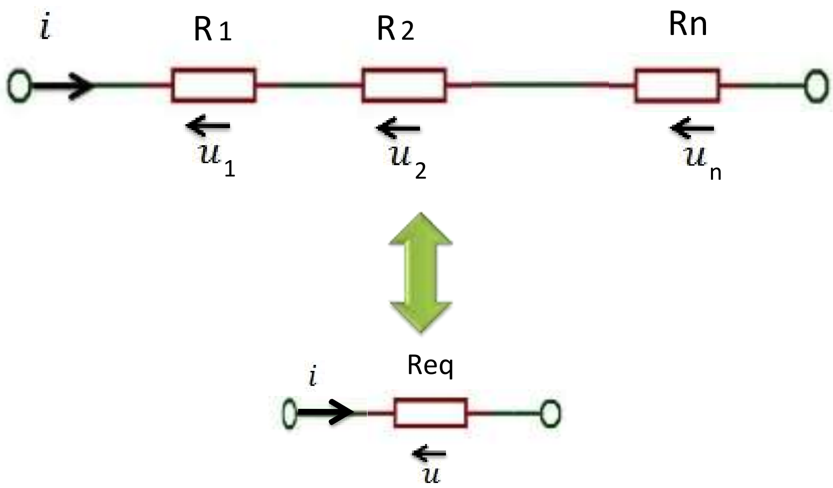


Figure 2.6 Association des résistances en série.

En série : Le courant est commun à toutes les résistances.

La tension aux bornes de l'ensemble est égale à :

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$$= (R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n)i = R_{eq}\, i$$

La résistance équivalente est alors égale à la somme des résistances placées en série.

Son unité est (Ohm) Ω.

$$R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n = \sum_1^n R_n$$

3.1.2 En parallèle

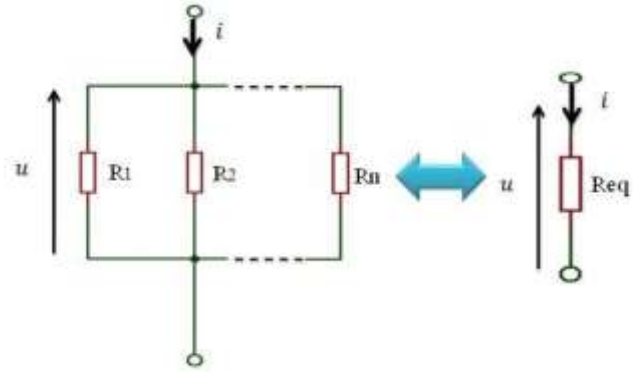


Figure 2.7 Association des résistances en parallèle.

En parallèle : La tension est commune à toutes les résistances.

Le courant qui entre dans l'ensemble est donné, selon la loi des nœuds, par:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n$$

$$= \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} + \frac{u}{R_2} + \cdots + \frac{u}{R_n}$$

$$= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right) u$$

$$= \frac{1}{R_{eq}} . u$$

L'admittance équivalente est égale à la somme des inverses des résistances placées en parallèle. Son unité est Ω^{-1}.

$$Y_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n} = \sum_1^n \frac{1}{R_n}$$

2. Association des inductances (L)

1. En série

Associer des inductances en série revient à augmenter le nombre total de spires. La tension aux bornes d'une inductance traversée par un courant d'intensité variable en fonction du temps est donnée par :

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

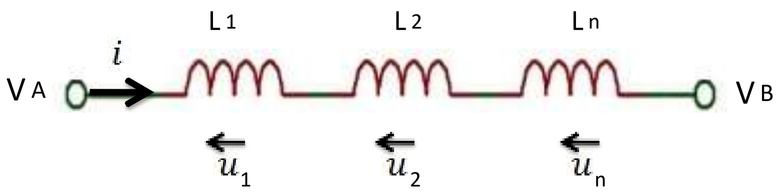


Figure 2.8 Association des inductances en série.

$$V_A - V_B = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$$= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} + \cdots + L_n \frac{di}{dt}$$

$$(L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

L’inductance équivalente est alors égale à la somme des inductances placées en série (On suppose que le courant a le même sens de circulation dans les bobines).

$$L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n = \sum_1^n L_n$$

3.2.2 En parallèle

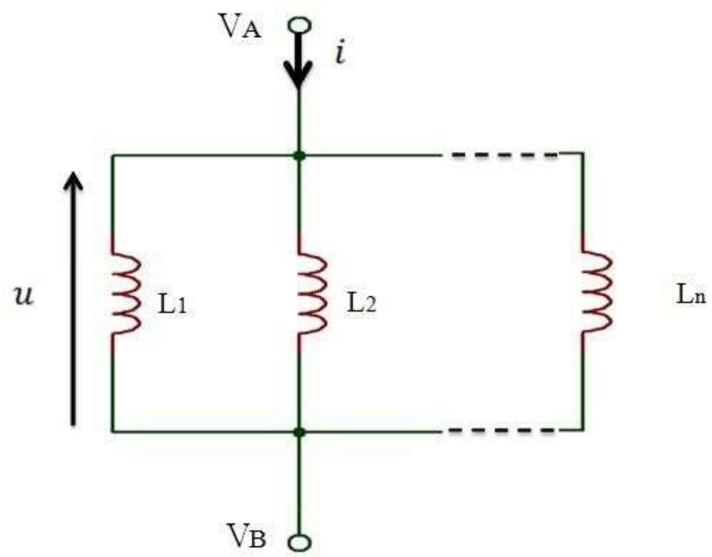


Figure 2.9 Association inductances en parallèle.

En parallèle la tension est commune à toutes les inductances. Le courant qui entre dans l’ensemble est (loi des nœuds):

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} + \cdots + \frac{di_3}{dt}$$

$$= \frac{V_A - V_B}{L_1} + \frac{V_A - V_B}{L_2} + \frac{V_A - V_B}{L_3} + \cdots + \frac{V_A - V_B}{L_n}$$

$$= (V_A - V_B)\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}\right)$$

$$= (V_A - V_B)\frac{1}{L}$$

L’admittance équivalente est égale à la somme des inductances placées en parallèle :

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_n} = \sum_1^n \frac{1}{L_n}$$

3. Association des condensateurs (C)

1. En série

Un condensateur est caractérisé par sa capacité, notée C et exprimée en Farads (symbole F).

La tension aux bornes d’un condensateur traversé par un courant d’intensité variable en fonction du temps est :

$$u_c = \frac{1}{C}\int idt$$

Le courant est commun à tous les condensateurs.

La tension aux bornes de l’ensemble est :

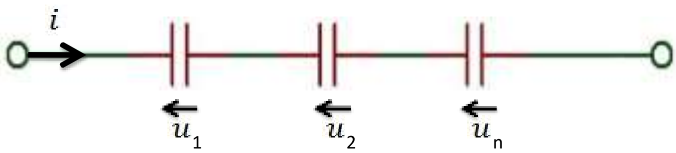


Figure 2.10 Association des condensateurs en série.

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$
$$= \frac{1}{C_1}\int i.dt + \frac{1}{C_2}\int i.dt + \frac{1}{C_3}\int i.dt + \cdots + \frac{1}{C_n}\int i.dt$$
$$\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right).\int i.dt$$

Alors :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n} = \sum_1^n \frac{1}{C_n}$$

3.3.2 En parallèle

En parallèle la tension est commune à tous les condensateurs.

Le courant qui entre dans l'ensemble est (loi des nœuds):

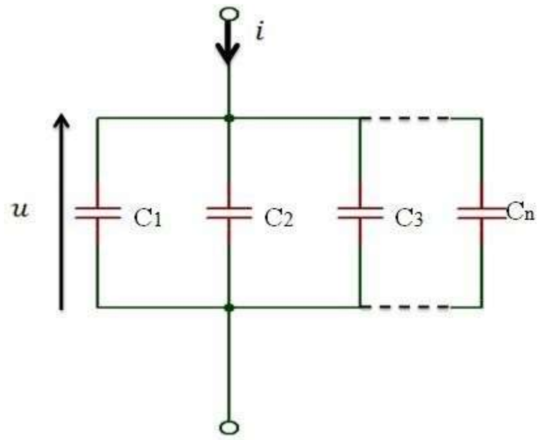


Figure 2.11 Association des condensateurs en parallèle.

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n \\ &= C_1\frac{du}{dt} + C_2\frac{du}{dt} + C_3\frac{du}{dt} + \cdots + C_n\frac{du}{dt} \\ &= (C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n)\frac{du}{dt} \end{aligned}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n = \sum_1^n C_n$$

2. Régime sinusoïdal

1. Représentation des grandeurs sinusoïdales

La représentation des grandeurs sinusoïdales (courant et tension) est donnée par :

$$u(t) = U_M.\sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_M.\sin(\omega t + \varphi_i)$$

U_M et I_M :Valeurs maximales respectives de $u(t)$ et de $i(t)$

$\omega t + \varphi$: Phase instantanée

ω : Pulsation en (rad/s) , $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

f : Fréquence en Hz et T : Période en Seconde

φ_u, φ_i : Phases à l'origine des temps de $u(t)$ et $i(t)$

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$: Différence de phase entre $u(t)$ et $i(t)$

2.2.2 Représentation vectorielle d'une grandeur sinusoïdale

On peut aussi représenter une grandeur sinusoïdale (courant, tension) par un vecteur tournant dans le plan OXY à la vitesse de rotation ω, dans le sens trigonométrique, c'est le vecteur de Fresnel associé à cette grandeur sinusoïdale. Pour simplifier la représentation des vecteurs de Fresnel, on choisit de les représenter à t=0, ce qui ne change en rien, le résultat final.

La norme du vecteur de Fresnel $Ueff$ de la grandeur $u(t)$ est égale à sa valeur efficace.

$$u(t) = U_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$$

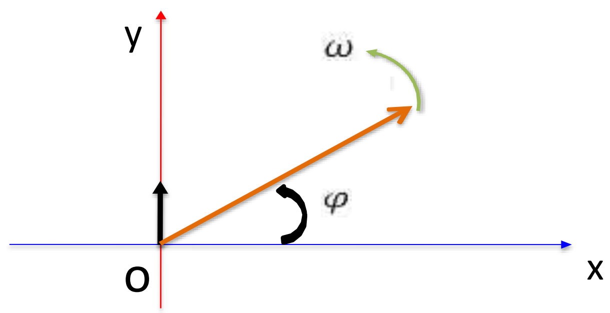


Figure 2.12 Vecteur de Fresnel.

2.2.3 Impédances complexe

L'impédance électrique permet de mesurer l'opposition d'un circuit électrique (des dipôles) au passage d'un courant électrique. Soit un circuit traversé par un courant électrique alternatif sinusoïdal de la forme.

$$i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cdot e^{j\varphi}$$

En utilisant la formule d'Euler, nous pouvons l'écrire sous la forme complexe :

$$i(t) = I_M \sin(\omega t) + jI_M \cos(\omega t)$$

Avec,

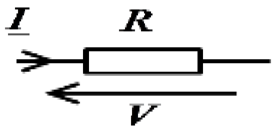
$$I_M = I_{eff}\sqrt{2}$$

2.2.4 Impédances complexes des dipôles élémentaire (R, L et C)

2.4.1 Résistance

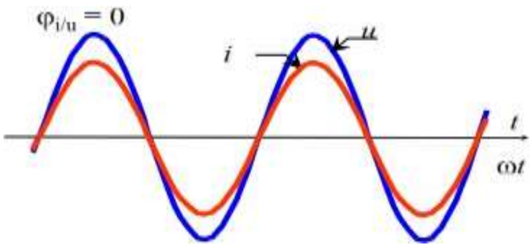
1. Caractéristiques de la résistance

- ✓ Symbole de la résistance



- ✓ Relation entre la tension et le courant en temporelle

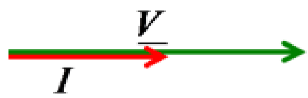
$$v(t) = Ri(t)$$

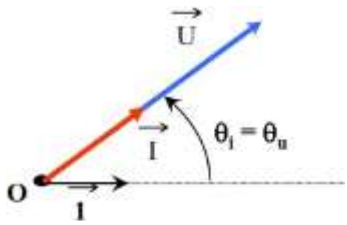


- ✓ Relation entre la tension et le courant en complexe

$$\underline{V} = R\underline{I}$$

- ✓ Représentation dans le plan complexe



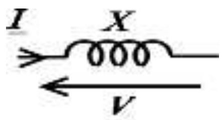


2. Inductance (Bobine)

- ✓ Relation entre l'inductance et la réactance : $X = L\omega$

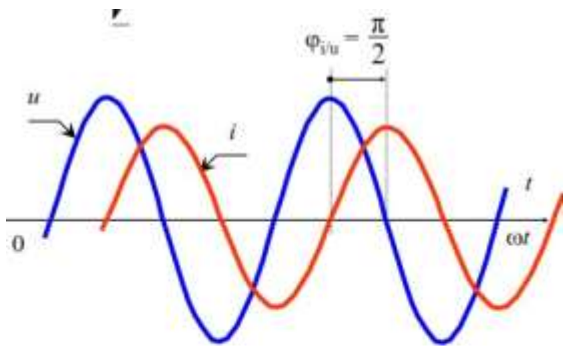
1. Caractéristiques de l'inductance

- ✓ Symbole de l'inductance



- ✓ Relation entre la tension et le courant en temporelle

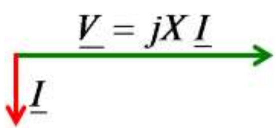
$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

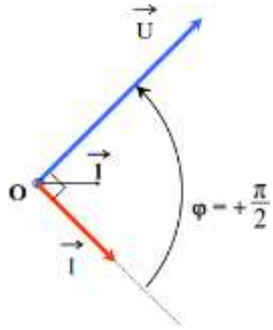


- ✓ Relation entre la tension et le courant en complexe

$$\underline{V} = jL\omega\underline{I} = jX\,\underline{I}$$

- ✓ Représentation dans le plan complexe

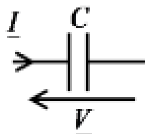




2.4.3 Condensateur

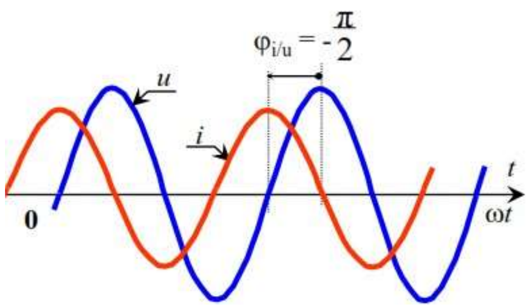
1. Caractéristiques du condensateur

- ✓ Symbole du condensateur



- ✓ Relation entre la tension et le courant en temporelle

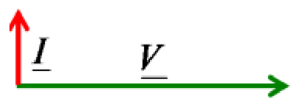
$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

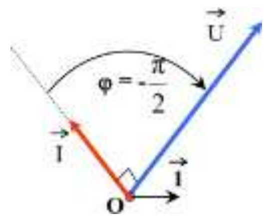


- ✓ Relation entre la tension et le courant en complexe

$$\underline{V} = \frac{1}{jC\omega}\underline{I}$$

- ✓ Représentation dans le plan complexe





5. Puissances en régime sinusoïdal (instantanée, active, réactive, apparente)

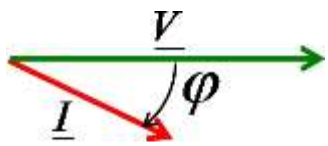
1. Puissance électrique en continu

Pour un dipôle électrique avec une tension V à ses bornes et parcouru par un courant I. Sa puissance électrique est donnée par le produit (courant*tension).

$$P = VI$$

2.5.2 Puissance électrique en alternatif (réseau monophasé)

Pour un dipôle électrique avec une tension à ses bornes et parcouru par un courant I déphasé d'un angle φ.



2.5.3 Puissance électrique instantanée p(t)

$$p(t) = v(t).i(t)$$

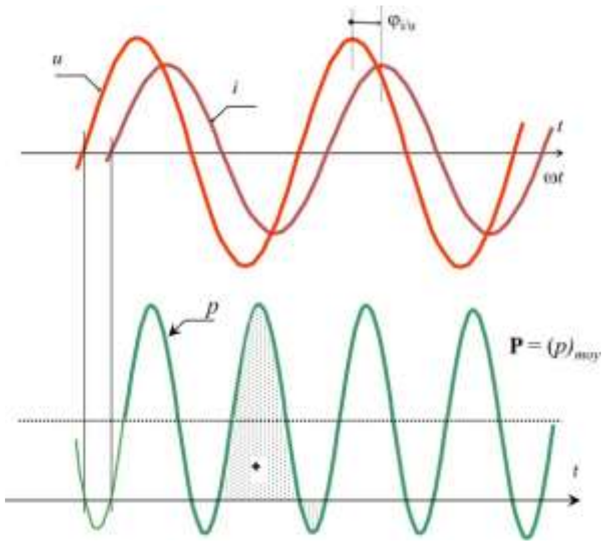


Figure 2.13 Puissance électrique en alternatif (réseau monophasé).

2.5.4 Puissance électrique en alternatif (réseau monophasé)

4.1 Puissance active

La puissance active représente la puissance moyenne consommée par le dipôle. Elle est exprimée en Watts.

$$P = UI.\cos(\varphi),\ [Watts]$$

2. Puissance réactive

$$Q = UI.\sin(\varphi),\ [VAR]$$

Q, s'exprime en Volt-Ampères-Réactifs [V.A.R].

3. Puissance apparente

La puissance apparente S est puissance fournie par la source.

Mathématiquement, le produit UI, s'exprime en Volt Ampère.

$$S = UI, [VA]$$

4.4 Remarques importantes:

1 Puissance apparente= Produit des valeurs efficaces

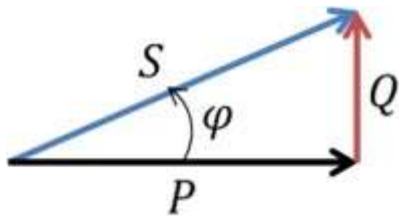
$$S = V_{eff} * I_{eff}$$

2 Relation entre les puissances (Triangle des puissances) :

$$S = S(\cos\varphi + j\sin\varphi) = P + jQ$$

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}$$

$$\tan\varphi=\frac{Q}{P}$$



3- Facteur de puissance :

$$f_p=\frac{P}{S}=\cos\varphi$$

2.6 Puissances des dipoles usuels

6.1 Résistance $\underline{V}=R\underline{I}$ et $\varphi=0$

- ✓ Uniquement de la puissance active absorbée

$$P=VI=RI^2=\frac{V^2}{R}$$

6.2 Inductance $\underline{V}=jL\omega\underline{I}=jX\,\underline{I}$

$$Q=VI=XI^2=\frac{V^2}{X}$$

6.3 Condensateur $\underline{V}=\frac{1}{jC\omega}\underline{I}$

$$Q=-VI=-\frac{I^2}{C\omega}=C\omega V^2$$

EXERCICES

Exercice 1

Si Im= 28.25A, φ_i = -15° et f = 50 Hz.

Exprimer la valeur instantanée du courant et calculer sa valeur efficace complexe sous trois formes.

Exercice 2

Soit la valeur efficace complexe du courant : I_{eff}= -3-j6.

Trouver les paramètres de la fonction sinusoïdale ainsi que la valeur instantanée du courant.

Exercice 3

Si $\underline{U} = -200 + j150$, f=50Hz.

Trouver la valeur instantanée de la tension (u(t)).

Exercice 4

La valeur instantanée d'un courant alternatif est : i(t) = 15,5A sin (100π t - π/6)

1. Quelle est la valeur de l'intensité maximale du courant ?

2. Quelle est la valeur efficace de l'intensité ?

3. Quelle est la pulsation ? En déduire la valeur de la fréquence et celle de la période.

4. Calculer la valeur du courant à l'instant t = 0, à l'instant t = 5 ms et à l'instant t = 10 ms

5.Ce courant est appliqué à une résistance de 20Ω. Exprimer la tension u(t) aux bornes de cette résistance.

6. Calculer la tension efficace.

Système triphasé

3.1 Avantages des réseaux triphasés

- ✓ Au niveau de la production : moins volumineux et moins cher.
- ✓ Au niveau du transport : section de conducteur plus faible.
- ✓ Au niveau de l'utilisation : deux niveaux de tensions différents.

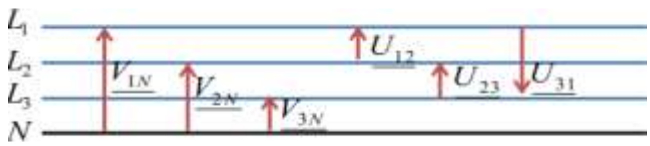
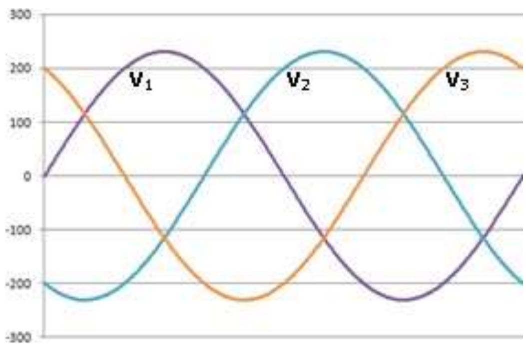


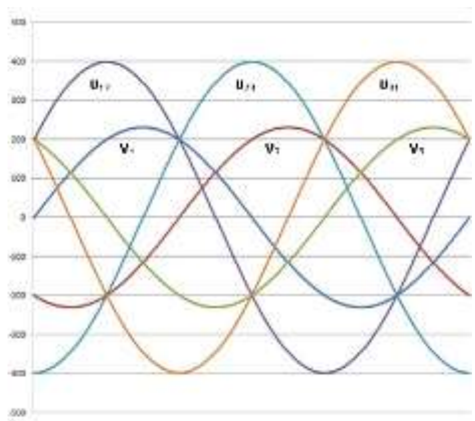
Figure 3.1 Réseau Triphasé.

- Tension simple : Tension entre une phase et le neutre et notée $\underline{V_{iN}}$
- Tension composée : Tension entre deux phases et notée $\underline{Uij}$
- Relation entre Tension simple et composée : $\underline{Uij} = \underline{V_{iN}} - \underline{V_{JN}}$

2. Représentation des tensions : Différentes représentations possibles

1. Représentation temporelle





3.2.2 Représentation mathématique

$$v_{1N}(t) = \sqrt{2}V\sin(\omega t)$$

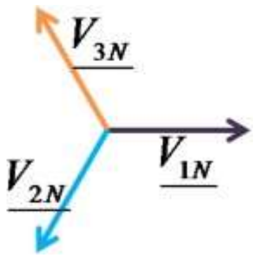
$$u_{12}(t) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

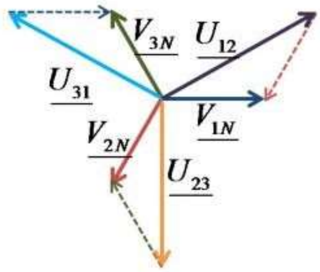
$$v_{2N}(t) = \sqrt{2}V\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$u_{23}(t) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3})$$

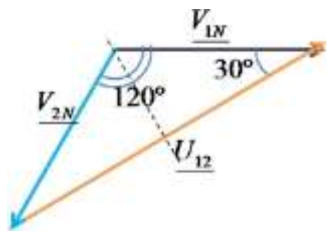
$$v_{3N}(t) = \sqrt{2}V\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$$
$$u_{23}(t) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})$$

3.2.3 Représentation vectorielle





3.2.4 Relation entre les tensions efficaces simple et composée

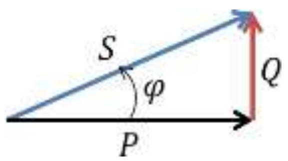


$$U = 2V\cos(30^o) = 2V\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$U = \sqrt{3}V$$

3. Puissance en alternatif (réseau triphasé)

- φ : Déphasage entre une tension simple sur une phase et le courant de la même phase.
- Expression en fonction de la tension simple ou composée.
- Puissance instantanée : $p(t) = v_{1N}(t)i_1(t) + v_{2N}(t)i_2(t) + v_{3N}(t)i_3(t) = 3VI\cos\varphi$
- Puissance active : $P = 3VI\cos\varphi = \sqrt{3}UI\cos\varphi$
- Puissance réactive : $Q = 3VI\sin\varphi = \sqrt{3}UI\sin\varphi$
- Puissance apparente : $S = 3VI = \sqrt{3}UI$
- Relation entre les puissances :



$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{Q}{P}$$

- Facteur de puissance : $f_P = \dfrac{P}{S} = \cos\varphi$

3. Couplage des enroulements

Différentes possibilités pour coupler les enroulements d'une charge ou d'un générateur :

1. Couplage Etoile

- Schéma de Câblage

- Caractéristiques du couplage Etoile

Tension efficace au bornes d'un enroulement : $V = \dfrac{U}{\sqrt{3}}$

Courant efficace dans un enroulement : I

3.3.2 Couplage Triangle

- **Schéma de Câblage**

- Caractéristiques du couplage Triangle

Tension efficace aux bornes d'un enroulement : U

Courant efficace dans un enroulement : $J = \dfrac{I}{\sqrt{3}}$

3. Remarque

Au niveau des phases :

- Couplage Triangle : possibilité d'avoir un courant de phase plus important.
- Couplage Etoile : possibilité d'avoir une tension entre phases plus importante.