ثانيا – طريقة السمبلكسSimplexMethod:

في طريقة التمثيل البياني يصعب حل المسائل التي يزيد عدد متغيراتها عن اثنين، ولكن غالباً ما تكون المتغيرات في المسائل أكثر من متغيرين، لذا نلجأ إلى الطريقة المبسطة السمبلكس لحل مثل هذه المسائل، وهي طريقة للعالم الأمريكي جورج وانترج، الذي استخدمها عام 1945.

حيث تتلخص طريقة الحل باستخدام SimplexMethod بالخطواتالتالية:

1. بناء النموذج الرياضي للمسألة.
2. إعادة كتابة النموذج الرياضي حسب الشكل القياسي Standard forum.

وهو على الصورة العامة التالية:

$$S.T:$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots. + a_{1n}X_n = b_1$$

3. إيجاد الحل الأولي الممكن .InitialFeasibleSolution.
4. ترتيب الحل الأولي في الجدول.
5. اتباع خطوات معينة لإيجاد الحل الأمثل والتي سنوضحها في المثال التالي:

معلومة:يمكن إعادة كتابة الصورة العامة بطريقة المصفوفة كالتالي:

مثال 1:اكتب النموذج الرياضي التالي حسب الشكل القياسي:

الحل:

$S.T:$

هنا نلاحظ أنه قد تم تحويل القيود (المتباينات) ذات العلاقة أقل أو يساوي ($\leq$) إلى معادلات بإضافة متغير حر (S) Slack Variable إلى كل قيد من القيود التي تحمل إشارة $\leq$ ، وهذا المتغير يعني الفرق بين الوقت اللازم للإنتاج والوقت المتوفر للمصنع أو الفرق بين الكمية المستخدمة في الإنتاج والكميةالمتوفرة للمصنع.

مثال 2:اكتب النموذج الرياضي التالي حسب الشكل القياسي:

$S.T:$

الحل:

$S.T:$

استخدام طريقة السمبلكسSimplexMethod في حل مسائل تعظيم الأرباح Maximization:

مثال 1:مستخدمًا طريقة السمبلكس أوجد الحل الأمثل للنموذج الرياضي التالي:

الحل:في هذا المثال سنوضح كل خطوة بالتفصيل:

1. تحويل دالة الهدف Z إلى دالة صفرية أي مساوية للصفر كالتالي:

2. تحويل جميع القيود من متباينات إلى معادلات وذلك بإضافة متغير حر جديد يسمى بالمتغير الإضافي SlackVariable وسوف نرمز له بالرمز S_i وذلك بعدد المعادلات. حيث تمثل i عدد المتغيرات.

3. إضافة شرط عدم السلبية إلى جميع المتغيرات في المسألة.

يمكننا ترتيب الخطوات السابقة مع بعضها البعض على النحو التالي:

4. نكون جدولاً يتضمن معاملات المتغيرات في دالة الهدف والقيود بالصيغ الجديدة ويسمى هذا الجدول بجدول الحل الابتدائي كما يلي:

Basic Variable	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
Z	1	-2	-3	0	0	0
S_1	0	1	2	1	0	20
S_2	0	1	1	0	1	12

من الجدول يمكن إيجاد الحل الابتدائي وذلك كما يلي:

- لإيجاد قيم المتغيرات في هذا الجدول وفي أي جدول آخر نأخذ المتغيرات الموجودة في عمود BasicVariable ونقارنها بما يقابلها من قيم فيعمود Solution
- تسمىالمتغيرات الأساسية X_1, X_2 متغيرات داخلة**Entering variable** وهي المتغيرات التي تؤثر على قيمة دالة الهدف.
- أما المتغيراتS_1, S_2, فهي المتغيرات الخارجة **LeavingVariable** وهي لا تؤثر على قيمة دالة الهدف.

معلومة:

1. طريقة السمبلكس تفترض عند بدء الحل أن يكون الفرق بين عددالمتغيرات ويرمز له بالرمز nوعدد قيود المسألة ويرمز له بالرمز m مساوياًللصفر.

ففيالمثال أعلاه عدد المتغيرات يساوي أربعة X_1, X_2, S_1, S_2أي أن $n = 4$وعدد القيود يساوي اثنين أي أن $m = 2$ وعليه فإن $n - m = 2$، وبما أن الناتج لا يساوي صفرًا يجب أن نضيف متغيرين بناءً على الفرق بين m و nوتكون قيمة هذين المتغيرين صفر كي يتم البدء في حل أساسي ممكن Basic،FeasibleSolution.

2. وفي طريقة السمبلكس تكون قيم المتغيرات الأصلية مساوية للصفر فيبداية الحل ففي المثال أعلاه كانت قيمة $X_1 = 0,\ X_2 = 0$.
3. يتم تحويل المتغيرات من متغيرات غير أساسية (مساوية للصفر) إلى متغيرات أساسية (لها قيمة معينة)، حسب قواعد وشروط كما في النقطة رقم 5.

5. اختيار المتغيرات الداخلة EnteringVariable والمتغيرات الخارجةLeavingVariable.

معلومــة:

– **المتغير الداخل:** هو متغير غير أساسي والمراد تحويله إلى متغير أساسي مثل X_1, X_2.

– **المتغير الخارج:** هو متغير أساسي يراد تحويله إلى متغير غير أساسي S_1, S_2

كيفية تحديد المتغير الداخل:

المتغير الداخل هو: المتغير الذي يشتمل على أكبر معامل سالب في دالة الهدف بجدول الحل وفي مثالنا يكون المتغير X_2هو المتغير الذي يشتمل على أكبر معامل بإشارة سالبة -3 في معادلة دالة الهدف Z وعليه يكون المتغيرالداخل هو X_2.

. كيفية تحديد المتغير الخارج:

نحدد المتغير الخارج وذلك عن طريق تقسيم الثوابت تحت عمود الحل Solution في الجدول على المعاملات إزاء كل منها والموجودة تحت عمود المتغير الداخل مع إهمال المعاملات السالبة والصفرية. ويكون المتغير في الصف الذي يمثل أقل نسبة ناتجة عن تقسيم الثوابت على المعاملات الموجبة تحت المتغير الداخل ويمكن تلخيص هذه الخطوة بالجدول التالي:

ناتج القسمة	Solution	عمود المتغير الداخل X_2	متغيرات أساسية
2			
1			

المتغير الداخل هو X_2، والمتغير الخارج هو S_1 (أقل نسبة ناتجة عنتقسيم الثوابت على المعاملات).

6. لبناء الجدول رقم 2:

– نقوم بتقسيم جميع القيم إزاء المتغير الخارج S_1 أو معادلة S_1 على العنصر الممهد PivotElement ويسمى ناتج القسمة بالمعادلة الممهدة PivotEquation ويتم وضعها في الجدول رقم2

Basic						Solution
	1		0		0	30

	0				0	
	0		0		1	2

جدول رقم 2

–نقوم بتعبئة بقية القيم في الجدول بعد تحديد معادلة العنصر الداخلالجديد X_2 على النحو التالي:

القانون (المعادلة):

سطر القيم الجديد=سطر القيم القديم – سطر القيم المقابلة تحت عمود المتغير الداخل ×المعادلة الممهدة.

وبالتالي نملأ الجدول رقم 2 كالتالي:

– لإيجاد معادلة Z الجديدة.

معادلة Z الجديدة =سطر القيم القديم لـ Z–المعادلة الممهدة × 3

1		1		0	10

–

−2	−3	0	0

=

	0		0	30

لتصبح معادلة Z الجديدة =

لإيجاد معادلة S_2 الجديدة=معادلة S_2 القديمة – المعادلة الممهدة ×1

1×	1	1		0	10	−	1	1	0	1	12

	0		1	2	

معلومة هامة:نعرف بأننا وصلنا إلى الحل الأمثل في حالة مسائل:

1. التعظيم Maximization عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف في جدول الحل الأمثل أكبر من أو تساوي صفر $(0 \geq)$، نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، أما في حالة في وجود معاملات سالبة في دالةالهدف فإن الحل لم ينته ويجب إعادة الخطوات السابقة.

2. التقليل Minimizations: عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف في جدول الحل الأمثل أقل من أو تساوي صفر ($0 \leq$)،نكونقدوصلناإلىالحلالأمثلأمافيحالةوجودمعاملاتموجبةفيدالةالهدففإنالحللمينتهِويجبإعادةالخطواتالسابقة.

7–في المثال السابق لم نصل إلى الحل الأمثل بعد وذلك لوجود معامل سالب في دالة الهدف وهو معامل X_1 و يساوي $1/2-$ لذلك نكرر الخطوات5 و 6 كالتالي:

العنصر الداخل هو X_1 وذلك لأنه يمتلك أعلى معامل سالب ويساوي $1/2-$ ولتحديد المتغير الخارج نقوم بقسمة الثوابت تحت عمود الحل على المعاملات تحت عمود المتغير الداخل X_1 كالتالي:

متغيرات أساسية	عمود المتغير الداخل X_1	Solution	ناتج القسمة

لذا يكون العنصر الخارج S_2 لأن ناتج القسمة أقل ويحل محله X_1 العنصر الممهد هو $1/2$ ومن ثم نقسم معادلة S_2 على العنصر الممهد $1/2$.

Basic						Solution
	1	0	0	1	1	32
	0	0	1	1	-1	8
	0	1	0	-1	2	4

جدول رقم (3)

تم ملء القيم في الجدول السابق كالتالي:

1. معادلة Z الجديدة $=$ سطر القيم القديم لـ $Z -$ المعادلة الممهدة $\times$ $(-1/2)$

	1	0	-1	2	4	-	-	0	3	0	30	=	
								0	0	1	1	30	= معادلة Zالجديدة

2. معادلة X_2 الجديدة :سطر القيم القديم لـ $X_2 -$ المعادلة الممهدة $\times$ $(1/2)$

(1	0	-1	2	4	-		1	1	0	10	=
0	1	1	-1	8	السطر الجديد لـ X_2 :. =						

يتضح من الجدول رقم 3 أن جميع معاملات دالة الهدف Z موجبة. لذا فإننا قد توصلنا إلى الحل الأمثل للمسألة وعليه تكون قيم المتغيرات كالتالي: $S_1 = 0$, $X_1 = 4$

وقيمة الأرباح: $Z = 32$

تمرين تحقق من الحل

مثال 2:أوجد الحل الأمثل للنموذج الرياضي التالي مستخدماً طريقة السمبلكسSimplexMethod

الحل: نكتب النموذج على الصورة القياسية مع جعل معادلة $Z = 0$.

ثم تقوم بتعبئة جدول الحل الابتدائي كما يلي:

Basic								**Solution**
	1	−3	−2	−5	0	0	0	0
	0	1	2	1	1	0	0	430
	0	3	0	2	0	1	0	460
	0	1	4	0	0	0	1	420

جدول رقم 1

العنصر الداخل هو X_3 لأنه يمتلك أكبر معامل سالب والعنصر الخارجهو S_2 وأيضا العنصر الممهد 2 .
يمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي:

متغيرات أساسية	عمود المتغير الداخل X_3	Solution	ناتج القسمة
			لا يجوز القسمة على صفر

لتصبح البيانات الجديدة كما هي في الجدول رقم 2 التالي:

Basic								Solution
	1		2−	0	0		0	1150
	0		2	0	1		0	200
	0		0	1	0		0	230
	0	1	4	0	0	0	1	420

جدول رقم 2

واضح من الجدول رقم 2 أننا لم نصل إلى الحل الأمثل لوجود معاملات سالبة في دالة الهدف وعليه يكون العنصر الداخل هو X_2 والعنصر الخارج هو S_1 والعنصر الممهد هو 2. قم بإجراء الحسابات اللازمة لينتج لديك الجدول رقم 3 التالي:

Basic								Solution
	1		0	0	1		0	1350
	0		1	0			0	100
	0		0	1	0		0	230
	0	2	0	0	2−	0	1	20

جدول رقم 3

يتضح من الجدول رقم 3 أننا قد توصلنا إلى الحل الأمثل وذلك لأن جميعمعاملات دالة الهدف أكبر أو تساوي صفر.

وعليه يكون الحل الأمثل على النحو التالي:

وقيمة دالة الهدف: $Z = 1350$

مثال 3:مستخدمًا الطريقة المبسطة أوجد الحل الأمثل للنموذج الرياضي التالي:

الحل: نقوم بتعبئة الجدول الابتدائي مباشرة.

	Z	X	X	S	S	S		Solution	ناتج القسمة
	1	−3	−2	0	0	0			لا يجوز القسمة على سالب
	0	1	2	1	0	0			
	0	2	1	0	1	0			
	0	1−	1	0	0	1	0	1	لا يجوز القسمة على سالب
	0	0	1	0	0	0	1	2	لا يجوز القسمة على صفر

من ناتج القسمة يكون العنصر الداخل هو X_1 ومعامله 3− والعنصر الخارج هو S_2 وخارج القسمة 4، والعنصر الممهد = 2.

	Z	**X**		**S**		**S**		**Solution**	**ناتج القسمة**
	1	*0*	-	0		0			لا يجوز القسمة على

								سالب
	0	0		1	-	0		
	0	1		0		0		
	0	0		0		1	0	5
	0	0	1	0	0	0	1	2

لم نصل إلى الحل الأمثل لأنه ما يزال معامل X_2 سالب ويساوي $-1/2$. لذلك العنصر الداخل الآن هو X_2 والخارج هو S_1 والعنصر الممهد هو $2/3$.

Basic							Solution
	1		0			0	
	0		1		-	0	
	0		0	-		0	0
	0	0	0	-1	1	1	0	3
	0		0	-		0	1	

يتضح من الجدول أن الحل الذي توصلنا إليه هو الحل الأمثل لأن جميع معاملات Z أكبر أو يساوي صفر ولا يوجد معاملات سالبة وتكون قيمته تساوي $38/3$ وذلك عندما تكون قيم المتغيرات كالتالي:

$X_1 =$

مثال 4:أوجد الحل الأمثل للنموذج الخطي الرياضي التالي مستخدمًا الطريقةالمبسطة.

الحل:سوف نبني الجدول مباشرة:

ناتج القسمة	Solution	S	S		X	Z	
لا يجوز القسمة على سالب		0	0		-	1	
		0	1		3	0	
1		1	0		1	0	

لاحظ أن المتغير الداخل هو X_1 بينما العنصر الخارج هو S_1، والعنصرالمحوري هو 3 .

ناتج القسمة	Solution	S			X	Z	
لا يجوز القسمة على سالب		0	1			1	
		0			1	0	
		1	-		0	0	

المتغير الداخل هو X_2 والمتغير الخارج هو S_2 والعنصر الممهد هو $2/3$.

Solution				X	Z	
					1	
	-			1	0	
		-		0	0	

من الجدول السابق يتضح أننا قد وصلنا إلى الحل الأمثل وعليه تكون قيمة المتغيرات هي:

وقيمة الأرباح $Z = 2250$

استخدام طريقة السمبلكس في حل مسائل تخفيض التكاليفMinimizationsProblems:

عملية تحويل المتباينات من إشارة أكبر أو يساوي إلى إشارة المساواة تتطلب طرح متغيرات فائضة SurplusVariable من الطرف الأيسر.

مثال: $2X_1 + 3X_2 \geq 1500$

لتحويل القيد التالي إلى قيد مساواة نحتاج إلى طرح المتغير الفائض S_1من الطرف الأيسر:

معلومة:

1. من الشروط الأساسية للبرمجة الخطية ما يسمى بشرط عدم السلبية لجميع المتغيرات مهما كان نوعها.
2. بناءً على النقطة السابقة فإنه في حال التعامل مع المتغيرات الفائضة فإننا نواجه مشكلة في إيجاد الحل الأولي الممكن StartingSolution، حيث يفترض أن تكون قيم جميع المتغيرات سواء كانت أساسية أو مضافة (الحرة أو الفائضة) غير سالبة، فإذا افترضنا أن $X_1 = 0,\ X_2 = 0$ فهذا يعطي قيمة $S_1 = 1500$ وهذا يعني تحقق شرط عدم السلبية، أي أننا لا نستطيع استخداممعادلة القيد بوظيفتها الحالية، وفي هذه الحالة يوجد مشكل في الحل.
3. لحل المشكلة السابقة نضيف متغيرات مصطنعة ونرمز لها بالرمز R وتكون هذه المتغيرات سالبة في دالة الهدف، وعليه يصبح القيد السابق بعد إضافة المتغير المصطنعR إلى المعادلة كالتالي:

4. بعد إضافة المتغير المصطنع فإننا نأخذ هذا المتغير R_1 كمتغيرقاعدي في الحل الأولي بطريقة السمبلكس بدل S_1، وبالتالي فإن قيمة R_1 يجب ألا تكون ضمن متغيرات قاعدة الحل الأمثل أي أن قيمة R يجب أن تساوي صفر في الحل الأمثل.

مثال:اكتب النموذج الرياضي بالشكل القياسي باستخدام المتغيرات الاصطناعية:

الحل:

وعندما تكون ($X_1, X_2, S_1 = 0$) فإن قيم المتغيرات القاعدية المستعلة لقيود المسألة في الحل الأولي الممكن هي: $R_1 = 3, R_2 = 6, S_2 = 4$

لاحظ أننا أضفنا متغير قاعدة R_2 للقيد الأول والذي يحتوي على إشارة المساواة، وللقيد الثاني تم طرح متغير Slack Variable (S)وإضافة متغيرقاعدي R_2.

معلومة : يمكن حل مسائل تخفيض التكاليف Minimization أو المسائل التي تحتوي على إشارة $\geq$ أو = بغض النظر عن نوعية المسألة MIN و MAXبإحدى الطرق التالية:

1. طريقة BIG-M.
2. طريقة المرحلتين Tow Phase Method.

وسوف نتناول هذه الطرق بالصفحات التالية:

أولاً: طريقة BIG-M

نضيف المتغيرات الاصطناعية إلى دالة الهدف وذلك على النحو التالي:

1− في مسائل التخفيض Minimization:

يعطى معامل R في دالة الهدف قيمة كبيرة جدًا بحيث يكون وجود أيةقيمة لـ R في قاعدة الحل تسبب عدم أمثلية الحل ويرمز إلى هذه القيمة بالرمز M ويعرف بإشارة موجبة كالتالي:

2− في مسائل التعظيم Maximization:

يعرف معامل R في دالة الهدف بالرمز M وتكون إشارته سالبة، وذلكلتسهيل خروجه من قاعدة الحل مباشرة ودخول المتغيرات الأساسية التي تحققعائداً أكبر بالدخول إلى قاعدة الحل:

مثال 1:أوجد الحل للنموذج الرياضي التالي باستخدام طريقة BIG - M :

الحل:الشكل القياسي للمسألة:

ونلخص هذه المعلومات في الجدول الآتي:

Basic							Solution
	1		−12				
	0		2				
	0		−1			1	

إن استعمال متغير اصطناعي ArtificialVariable من شأنه أن يسبب خرقاً لمنطقة المشكلة موضوع الدراسة، لذا يتوجب التخلص من هذه المتغيرات بالسرعة الممكنة، حيث نلاحظ أن معامل R_1 في دالة الهدف لا يساوي صفر مع أنها تمثل حلاً ابتدائياً، لذا يجب جعلها (=) صفر وذلك بضرب معادلة R_1بـMثم جمعها إلى معادلة Z فينتج الجدول التالي:

	Z				S	I	Solution	ناتج القسمة
	1	-		-	0			
	0	1		1	1			
	0	2		3	0			2

ويتضح من الجدول السابق أن العنصر الداخل هو X_2والعنصرالخارجي هو R_1والعنصرالمحوري هو 3

							Solution	ناتج القسمة
				0				
	0			0	1			
	0			1	0			لا يجوز القسمة على سالب

العنصر الداخل هو X_2 والعنصر الخارج هو S_1 والعنصر المحوري هو $7/3$

Basic							Solution
	1		0				
	0		1				
	0		0				

العنصر الداخل هو X_1 والعنصر الخارج هو X_3 والعنصر المحوري هو $5/7$

Basic							Solution
	1		0				
	0		1				
	0		0				

الحل الأمثل هو عندما $X_1 = 9/5$ و $X_2 = 8/5$ و $Z = 141/5$

مثال 2: أوجد الحل للنموذج الرياضي التالي باستخدام طريقة BIG – M:

الحل: نكتب النموذج على الصورة القياسية:

ثم نقوم بتلخيص هذه المعلومات في الجدول رقم 1 التالي:

Basic								Solution
	1							
	0		1				0	
	0		3			0	1	
	0	1	2	0	1	0	0	3

جدول 1

								Solution	ناتج القسمة
	1								
	0	3		0		1			
	0	4		-1		0			$6/4 = 1.5$
	0	1		0		0	*0*	3	$3/1 = 3$

جدول 2

في الجدول رقم (2) العنصر الخارج هو R_1 والعنصر الداخل هو X_1(أكبر معامل موجب) والعنصر الممهد هو3.

								Solution	**ناتج القسمة**

	1								
	0	1		0					
	0	0		−1					
	0	0		0			*0*	2	

جدول 3

نلاحظ أن ناتج القسمة متساويات للمتغيرين R_2 وS_1 فنختار أولاً المتغير الاصطناعي R_1، وعليه العنصر الداخل هو X_2 و العنصر الخارج هو R_2 ، العنصر الممهد هو $5/3$.

Basic								Solution
	1							
	0		0					
	0		1					
	0	0	0	1	1	1	−1	0

جدول 4

العنصر الداخل هو S_1 و الخارج هو S_2 والعنصر المحوري هو 1.

Basic								Solution
	1							
	0		0					
	0		1					
	0	0	0	1	1	1	−1	0

جدول 5

الحل الأمثل كما هو واضح من جدول 5هو $Z = 18/5$ وقيم المتغيرات هي:

مثال 3:

الحل:

نلاحظ أننا أضفنا متغيرات اصطناعية R_1, R_2 للمتباينات الأولى والثانية لاحتوائها على إشارة = وإشارة أكبر من أو يساوي $\leq$، ونلخص المعلومات في الجدول التالي:

	Z							**Solution**	**ناتج القسمة**
	1						-		
	0	3		0					
	0	4		−1					
	0	1		0			0	4	
	1			-					
	0								
	0			-					6

	0								$4/1=4$

المتغير الداخل هو X_1 أكبر معامل موجب وبناءً على ناتج القسمة يكونالمتغير الخارج هو R_1.

	Z							**Solution**	**ناتج القسمة**
	1								
	0	1		0					
	0	0		−1					
	0	0		0			*0*	3	

العنصر الداخل هو X_2 والخارج هو R_2

	Z							**Solution**	**ناتج القسمة**
	1								
	0	1							
	0	0							لا يجوز القسمة على سالب
	0	0		1			*−1*	1	

العنصر الداخل هو S_1 العنصر الخارج هو S_2

	Z							**Solution**
	1			0				
	0	1		0				
	0	0		0				
	0	0		1			*−1*	1

الحل الأمثل هو $Z = 17/5$ وهي أقل تكلفة حيث قيم المتغيرات هي:

مثال 4:أوجد الحل الأمثل للنموذج الرياضي التالي باستخدام طريقة الـBIG- M:

الحل:نضع النموذج بالشكل القياسي :

ثم نقوم بعمل الجدول التالي:

	Z							Solution
	1			0			−	
	0	5		−1				
	0	2		0				

	Z							Solution	ناتج القسمة
	1	−			−				لا يجوز القسمة على سالب
	0	5							
	0	2							15/5 =3

العنصر الداخل هو X_2 و الخارج هو R_2 والعنصر الممهد هو 5.

B	Z							Solution
	1							
	0			−1				
	0			0				

العنصر الداخل هو X_1 و الخارج هو R_1 العنصر الممهد هو $17/5$

B	Z	X	X					Solution	ناتج القسمة
	1								
	0	1							
	0	0							لا يجوز القسمة على سالب

العنصر الداخل هو S_2 والخارج هو X_1 العنصر المحوري هو $17/4$

B	Z							Solution
	1							
	0							
	0							

الحل الأمثل يكون عندما $Z = 25$ وهي أقل تكلفة وهذا عندما تكون قيمالمتغيرات كالتالي:

ثانياً: طريقة المرحلتين Two-Phase Method

تختلف هذه الطريقة عن BIG-M في أنها لا تستخدم المتغير M وتعتمدفي إيجادها الحل الأمثل على مرحلتين:

المرحلة الأولى:

1. نقوم بتحديد المتغيرات الاصطناعية.
2. إذا كانت المسألة:

أ) مسألة تعظيم Maximization فإننا نكتب دالة الهدف على الصيغة:

ب) مسألة تخفيض التكاليف Minimization فإننا نكتب دالة الهدف علىالصيغة:

3. إعطاء دالة الهدف قيمة تعتمد على مجموع المتغيرات الاصطناعية.

4. إيجاد الحل الابتدائي أي أن تصبح قيمة دالة الهدف (r) الجديدةمساوية للصفر.

5. ننتقل إلى المرحلة الثانية وذلك بوضع قيمة دالة الهدف Z في المسألة الرئيسة بدلاً من معادلة r.

6. نقوم بحل النموذج بطريقة السمبلكس البسيطة.

معلومـــة: بقية القيود سواء كانت المسألة MAX orMIN لا تختلف معالجتها عنطريقة الـ BIG-M

مثال 1:أعد حل المثال رقم 4 السابق بطريقة المرحلتين.

الحل:تحول إلى الصيغة التالية:

I	***Z***							**Solution**
	1							
	0							
	0							

نلاحظ أن معاملات R_2, R_1 في دالة الهدف r لا تساوي صفراً، مع أنهاتمثل حلاً ابتدائياً، لذا يجب جعلها تساوي صفراً، وذلكبجمعمعادلة R_2, R_1إلى دالة الهدف r فينتج الجدول التالي:

B	Z	X	X					Solution	ناتج القسمة
	1								لا يجوز القسمة على سالب
	0	5							
	0	2							15/5 =3

الآن نبدأ بحل الجدول بطريقة السمبلكس السابقة.

العنصر الداخل هو X_2 و الخارج هو R_2 والعنصر الممهد هو5.

B	Z		X					Solution	ناتج القسمة
	1	1							
	0	1							
	0				–				

العنصر الداخل هو X_1 و الخارج هو R_1 والعنصر الممهد هو17/5.

B	r							Solution
	1							
	0			–		5		
	0				–	2		

بنهاية هذا الجدول انتهت المرحلة الأولى، الآن نأخذ الجدول دون المتغيرات الاصطناعية مع وضع Z القديمة محل r الحالية:

نلاحظ في الجدول أعلاه أن المعادلة r عادتكما كانت في بداية الحل، أي قيمة $r = 0$

هنا وضعنا معادلة Z بدلاً من معادلة r	.			X			**Solution**
				-	0	0	
					-		
						-	

نلاحظ أن معاملات X_1, X_2 في دالة الهدف لا تساوي صفر ورغم أنها متغيرات أساسية، لذا يجب جعلها = صفر ، وذلك بضرب معادلة X_1 بـ 10 ومعادلة X_2 بـ 5 ثم جمعها إلى معادلة Z فينتج الجدول التالي:

E	Z		X			**Solution**	**ناتج القسمة**
	1			(−	1	5	
	0			(-			
	0				−		لا يجوز القسمة على سالب

العنصر الداخل هو S_2 و الخارج هو 1 العنصر المحوري هو $4/17$.

						Solution
		-			0	

الحل الأمثل يكون عندما تكون $Z = 25$ وهي أقل تكلفة وذلك عندما تكونقيم المتغيرات كالتالي:

مثال 2: باستخدام طريقة المرحلتين أوجد الحل الأمثل للنموذج:

الحل:

B							Solution

نلاحظ أن المتغيرات R_2, R_1 تمثل حلاً للنموذج الرياضي ومع ذلك فإن معاملاتها سالبة "لا تساوي صفراً" في دالة الهدف، لذلك يجب جعلها تساويصفر وذلك بإضافة معادلة R_2, R_1إلى معادلة دالة الهدف r، ليصبح الجدول الابتدائي مطابقاً للجدول التالي:

B		X					Solution	ناتج القسمة

العنصر الداخل هو X_1 والعنصر الخارج هو R_1 والعنصر المحوري هو 3.

B							Solution	ناتج القسمة
		5			-			
		1						
		5			-			2
		5			-			

العنصر الداخل هو X_2 والعنصر الخارج هو R_{21} والعنصر المحوري هو$5/3$.

							Solution

انتهت المرحلة الأولى.

نلاحظ من خلال الجدول أن قيمة r الناتجة تساوي صفر، بناءً على ذلكيكون لهذا النموذج حل.

المرحلة الثانية:نقوم بإلغاء المتغيرات الاصطناعية من الجدول السابق ونعوض مكان قيمة معادلة Rمعادلة Z السابقة على النحو التالي:

ليصبح الجدول الجديد كالتالي:

					Solution
				0	

نلاحظ من الجدول أن X_1, X_2هما حلا المسألة "متغيرات أساسية"، ومع ذلك فإن معاملات كل منهما في Z لا تساوي صفراً، لذا يجب قبل كل شيء جعل معاملاتهما تساوي صفرا وذلك بطريقة ضرب معادلة X_1 بـ 4 ومعادلة X_2 بـ 1 ثم جمعهما إلى معادلة Z لتنتج معادلة Z الجديدة كما في الجدولالتالي:

E					Solution	**ناتج القسمة**
				-		لا يجوز القسمة على سالب

المتغير الداخل هو S_1 والمتغير الخارج هو S_2 والعنصر الممهد هو 1. والحل ليس أمثلاً لأن S_1 متغير أساسي ومعامله في معادلة دالة الهدف Z أكبر من صفر لذلك يكون جدول الحل الأمثل على النحو التالي:

					Solution

بناءً على الجدول السابق فإن القيم الموجودة في عمود الـ Solution تمثل الحل الأمثل. وهي: $X_1 = 2/5, X_2 = 9/5, Z = 17/5$

مثال 3: باستخدام طريقة المرحلتين أوجد الحل الأمثل للنظام الرياضي التالي:

الحل:

E	***r***							**Solution**
	1							
	0							

	0							
	0							

B	r		X					Solution	ناتج القسمة
	1								
	0								
	0								
	0								

المتغير الداخل هو X_1 والخارج هو R_1 والعنصر المحوري هو 3.

B	r							Solution	ناتج القسمة
	1		5			-			
	0		1						
	0		5			-			
	0		5			-			

المتغير الداخل هو X_2 والخارج هو R_2 والعنصر المحوري هو $5/3$.

B	r							Solution	ناتج القسمة
	1								
	0								(
	0			-		-			لا يجوز القسمة على سالب
	0								

إلى هنا انتهت المرحلة الأولى وتبدأ المرحلة الثانية، حيث نسقط من الجدول السابق أعمدة المتغيرات الاصطناعية R_2, R_1 وذلك باستخدام دالة Z بدل دالة r ، أي بدل $r = R_1 + R_2$ نأخذ: $Z = 4X_1 + X_2$

ليصبح الجدول كالتالي:

B	Z					Solution
	1		-			
	0					
	0			-		
	0					

نلاحظ من الجدول أن المتغيرات X_2, X_1 هما حلان، ولكن معاملاتها فيمعادلة Z لا تساوي صفر، لذا يجب جعل معاملات Z بالنسبة لـ X_2, X_1 = صفر، وذلك بضرب معادلة X_1 بـ 4 ومعادلة X_2 بـ 1 وجمعها إلى معادلة Z:

B	Z					Solution
	1					
	0					
	0			-		
	0					

المتغير الداخل هو S_1 و الخارج هو S_2 و العنصر المحوري هو 1.

B	Z					Solution
	1				-	
	0				-	
	0					
	0					

انتهت المرحلة الثانيةوالحل هو $Z = 18/5$ وذلك عندما تكون قيم المتغيرات كالتالي:

حالات خاصة في طريقة السمبلكس لحل النموذج الرياضي:

1 -دورانية الحل "التكرار" :Degeneracy.

2 -عدم وجود حل ممكن: Infeasible Solution.

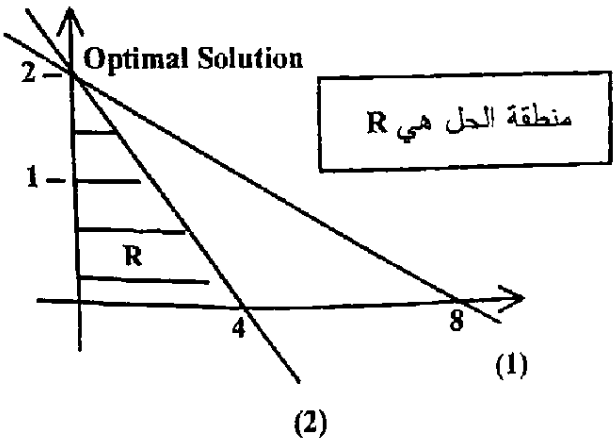
3 -تعدد الحلول المثلى: Multiple Optimal Solution.

4 - منطقة الحل غير محدودة: Unbounded Solution.

أولاً- دورانية الحل

تحدث هذه الحالة عندما يكون هناك قيد فائض لا حاجة له.

مثال:



من الشكل نجد أن القيد الأول $X_1 + 4X_2 \le 8$ غير ضرورياًلأنه قد تحددت منطقة الحل باستخدام القيد الثاني دون الحاجة إلى القيد الأول، وبطريقة السمبلكس نستطيع أن نبين حالة الدوران هذه كما يلي:

رقم الجدول						Solution
0						
1						

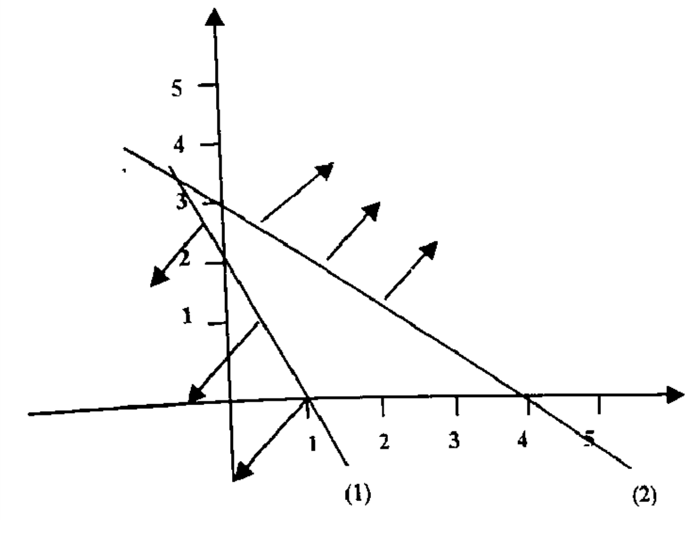
0			1		0	
2						

نلاحظ من الجدول أن قيمة Z لم تتغير مع خروج ودخول المتغير X_1، ولكنها بقيت نفس القيمة، وهذا ما يدعى بدورانية الحل.

ثانيا – عدم وجود حل ممكن InfeasibleSolution :

وتحدث هذه الحالة عندما يكون أحد قيود المسألة من نوع أصغر من أو يساوي $\geq$والقيد الآخر من نوع أكبر من أو يساوي $\leq$.

مثال:



وبطريقة السمبلكس يمكن توضيحها كما يلي:

رقم الجدول							Solution
−*1*							
0		-	-				

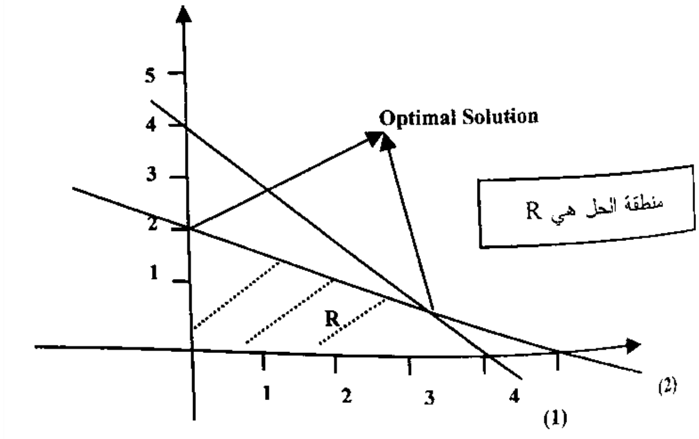
			1		0		
1							4

من الجدول يتضح أنه لا يوجد حل للمشكلة وذلك من خلال قيمة R_1الموجبة، مع ملاحظة أنجميعمعاملات دالة الهدف موجبة والتي تمثل حالةالحل الأمثل.

ملاحظة :إذا كانت المسألة Minimize عندها لن يكون هناك حل إذا كانت قيمة سالبة R_1، وتكون جميع معاملات دالة الهدف سالبة.

ثالثاً: تعدد الحلول المثلى Multiple Optimal Solution

وهو وجود أكثر من قيمة للمتغيرات لحل دالة الهدف.



وبطريقة السمبلكس يمكن توضيحها بالحل التالي:

رقم الخطوة						Solution	
0							
1							الحل الأمثل الأول
			1		0		
2							الحل الأمثل الثاني

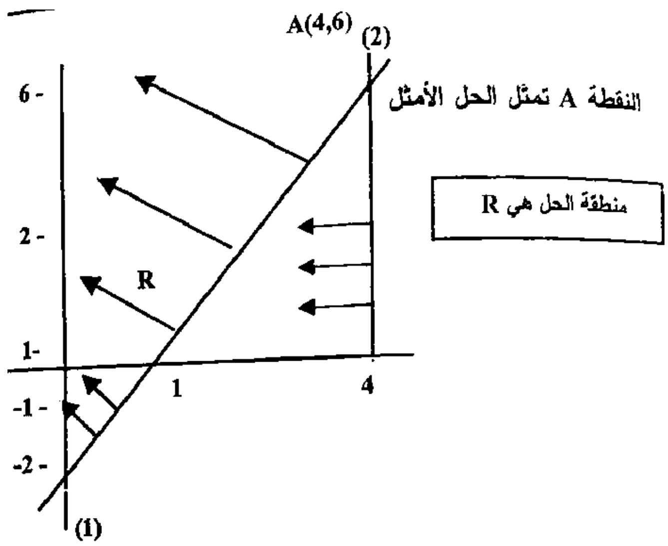
من الجدول يتضح أن هناك حلين لهذه المسألة الأول ينتج من الخطوة رقم1 وهو:

أما الحل الثاني فهو: $S_1 = S_2 = 0,\ \ X_1 = 3,\ \ X_2 = 1 \quad and\ Z = 10$

هذه النوعية من المسائل تفيد الإدارة في اتخاذ القرار المناسب ضمنالبدائل المتاحة.

رابعًا – منطقة الحل غير المحدودة:

مثال 1:



رقم الخطوة						Solution
0						
خارج →						
1						

					0	
خارج →						
2						

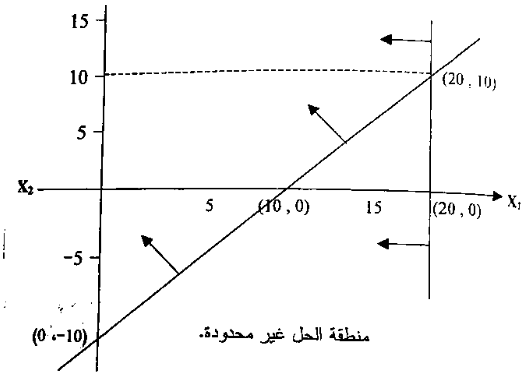
من خلال الجدول نستطيع أن نعرف أن منطقة الحل غير محدودة، وذلك إذا ظهرت معاملات سالبة في أعمدة المتغيرات الداخلة "غير السالبة" NonBasic في جدول الحل الابتدائي، كما يشير المستطيل في هذا المثال إلى هذهالحالة.

نستطيع القول أنه إذا كان معامل Z للمتغير الداخل موجبًا والعمود الذي تحته يحتوي على متغيرات سالبة فإن هناك حلاً مثاليًا وحيدً ا رغم أن منطقة الحل غير محدودة، أما إذا وجد معامل Z سالبًا وعمود المتغيرات أيضاً يحتوي على سالب في جدول الحل الابتدائي، فإن منطقة الحل تكون غير محدودة، كما في المثال التالي:

رقم الخطوة						**Solution**
0						
1						

					0	
2						

والرسم التالي يوضح هذه الحالة:



منطقة الحل غير محدودة.