

المحاضرة 03: الحل البياني

بعد بناء النموذج الرياضي نشرع في حل هذه المسألة بالطرق المذكورة سابقا.

أولا: طريقة الرسم البياني

تتمثل هذه الطريقة في رسم أو تمثيل مختلف القيود في مستوى منسوب لمعلم متعامد ومتجانس انطلاقا من الشكل المعياري للمسألة، ثم إسقاط ورسم معادلات القيود على محوري الفواصل والترتيب ، في كل مرة نجعل أحد المتغيرين يساوي الصفر لنحدد قيمة المتغير الآخر.

ففي مثالنا السابق وانطلاقا من القيود التاليين:

بالنسبة للقيود الأول Δ_1 :

نفرض أن $(X = 0)$ نعوض هذه القيمة في المتباينة الأولى على النحو التالي:

$$\begin{aligned} 3(0) + 6Y &\leq 2400 \\ \therefore Y &\leq \left(\frac{2400}{6}\right) \\ \therefore Y &\leq 400 \quad Y \in [0; 400] \end{aligned}$$

ولما نضع المتغير الآخر معدوم $(Y = 0)$ فإننا سنتحصل على:

$$\begin{aligned} 3X + 6(0) &\leq 2400 \\ \therefore X &\leq \left(\frac{2400}{3}\right) \\ \therefore X &\leq 800 \quad X \in [0 \quad 800] \end{aligned}$$

$(X, Y) \leq$

مما سبق يمكننا القول أن حلول هذه المتراجحة أو المتباينة هي جميع الثنائيات

$(800, 400)$ بيانها هي النقاط التي تقع على المستقيم Δ وما دونه.

اما بالنسبة للقيود الأول Δ_1 :

نفرض أن $(X = 0)$ نعوض هذه القيمة في المتراجحة الأولى علنألنحو التالي:

$$2(0) + Y \leq 1000$$

$$\therefore Y \leq 1000 \quad Y \in [0 \ 1000]$$

بينما عندما نضع المتغير الثاني يساوي الصفر ($Y = 0$) فإننا سنتحصل على:

$$2X + 0 \leq 1000$$

$$\therefore X \leq \left(\frac{1000}{2}\right)$$

$$\therefore X \leq 500 \quad Y \in [0 \ 500]$$

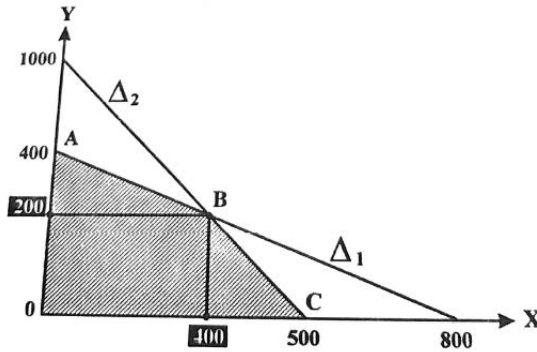
مما سبق نقول أن حلول هذه المتراجحة هي جميع الثنائيات $(X, Y) \leq (500, 1000)$ وبيانها هي النقاط التي تقع على المستقيم Δ_2 ومادونه.

مما سبق فإنه يمكن تلخيص حلول جملة المتراجحتين (1) و(2) في الجدول التالي:

القيود		
الحلول المشتركة		

الشكل الموالي:

ويمكن تمثيل هذه الجدول بيانيا في



الشكل رقم (): منطقة الحلول الممكنة

تسمى المساحة المحصورة بين النقاط (C, B, A, O) بمنطقة أو مساحة الحلول الممكنة، حيث أن أي نقطة ضمن هذه المنطقة تعطي حلا للمسألة ، لكنها ليست كلها حلولا مثلى، ولتحديد أي منها حل أمثل نقوم بمقارنة قيمة دالة الهدف عند مختلف نقاط الحدود أو أطراف مساحة الحلول الممكنة.

1- عند النقطة (A) حيث $X = 0$ و $Y = 400$ تكون قيمة دالة الهدف:

وتكون قيمة القيود:

$$3(0) + 6(400) = 2400 \quad \text{قيد ساعات العمل:}$$

$$2(0) + 1(400) = 400 \quad \text{قيد المادة الأولية:}$$

الملاحظ أنه عند هذه النقطة، أي فيما لو تنتج المؤسسة 400 وحدة من النوع الثاني فقط، فإن هذا سيؤدي حتما لاستغلال كامل لساعات العمل ، أما بالنسبة للمادة الأولية فإنها غير مستغلة تماما بل يبقى منها 600 وحدة قياس بإمكان استغلالها في إنتاج كميات إضافية.

$$-2 \text{ عند النقطة (B) حيث } X = 400 \text{ و } Y = 200 \text{ تكون قيمة دالة الهدف:}$$

وتكون قيمة القيود:

$$3(400) + 6(200) = 2400 \quad \text{قيد ساعات العمل:}$$

$$2(400) + 1(200) = 1000 \quad \text{قيد المادة الأولية:}$$

الملاحظ أنه عند هذه النقطة تكون كل الموارد المخصصة قد استغلت بالكامل وأن قيمة دالة الهدف أفضل من الحل السابق.

$$-3 \text{ عند النقطة (C) حيث } X = 500 \text{ و } Y = 0 \text{ فإن قيمة دالة الهدف هي:}$$

وتكون المواد المستهلكة هي:

$$\text{بالنسبة لساعات العمل: } 3(500) + 6(0) = 1500 \text{ (وتبقى منها 900 ساعة غير مستغلة)}$$

$$\text{أما المادة الأولية } 2(500) + 1(0) = 1000 \text{ (فهي مستغلة تماما)}$$

$$-4 \text{ عند النقطة (0) حيث } X = 0 \text{ و } Y = 0 \text{ فإن قيمة دالة الهدف هي:}$$

وتكون قيمة القيود:

$$3(0) + 6(0) = 0 \quad \text{قيد ساعات العمل:}$$

$$2(0) + 1(0) = 0 \quad \text{قيد المادة الأولية:}$$

يسمى الحل عند هذه النقطة بالحل المبدئي أو الحل القاعدي نلجأ إليه للانطلاق في عملية تحسين الحل، ولكن من الناحية الاقتصادية ليس له أي معنى.

يمكن تلخيص نتائج الحل حسب طريقة الرسم البياني في الجدول التالي:

الحلول الممكنة	قيود ساعات العمل	قيود المادة الأولية	قيمة دالة الهدف
النقطة (A)	2400 ساعة عمل مستغلة تماماً	400 وحدة قياس مستغلة فقط	12000 وحدة نقدية
النقطة (B)	2400 ساعة عمل مستغلة تماماً	1000 وحدة قياس مستغلة فقط	1400 وحدة نقدية
النقطة (C)	1500 ساعة عمل مستغلة فقط	1000 وحدة قياس مستغلة تماماً	10000 وحدة نقدية
النقطة (O)	2400 ساعة عمل غير مستغلة	1000 وحدة قياس غير مستغلة	00 وحدة نقدية

بمقارنة الحلول المختلفة عند النقاط O, A, B, C ، يتضح وأن الحل الأمثل يكون عند النقطة

$B(400,200)$ حيث يمكن إنتاج 400 وحدة من النوع (A) و 200 وحدة من النوع (B) وتحقق المؤسسة أقصى ربح وقدره 14000 وحدة نقدية مع الاستغلال الكامل للموارد المتاحة (ساعات العمل والمادة الأولية).

الحالات الخاصة لطريقة الرسم البياني:

1- حالة وجود أكثر من حل أمثل واحد:

في بعض الحالات نتحصل على حلول متعددة للمسألة تعطي قيماً متساوية لدالة الهدف وتسمى بالحلول البديلة، هذه الأخيرة تمنح للمؤسسة مجالاً واسعاً للاختيار، وفقاً لما تراه مناسباً. أنظر المثال (10-2) والجدول (19-2).

مثال () (مثال حول توازن المستهلك) :

لنفرض أن أحد المستهلكين يبحث عن تحديد أفضل توليفة ممكنة من السلعتين (A, B) في حدود ميزانيته المقدرة بمبلغ 300 وحدة نقدية، على أن لا تتجاوز عدد الوحدات المستهلكة من السلعة الأولى (A) 08 وحدة، ومن السلعة الثانية (B) 03 وحدات، فإذا كانت المنفعة الناتجة عن استهلاك الوحدة الواحدة من السلعة (A) هي 20 وحدة قياس أما المنفعة الناتجة عن استهلاك السلعة (B) فهي 40 وحدة قياس منفعة.

المطلوب:

ما هي التوليفة المثلى من السلعتين علما أن سعر الوحدة الواحدة من السلعة A هو 30 وحدة نقدية وسعر الوحدة من السلعة B هو 60 وحدة نقدية؟

حل المثال:

نفرض أن (X) هي عدد الوحدات التي يمكن لهذا الشخص استهلاكها من السلعة (A) وأن (Y) هي عدد الوحدات التي يمكنه استهلاكها من السلعة (B) . بناء على هذه الرموز يمكننا صياغة المسألة في النموذج التالي:

$$\text{دالة المنفعة الكلية: } [MAX]Z = 20X + 40Y$$

$$\text{شرط استهلاك السلعة } (A): (1) \dots \dots \dots X \leq 8$$

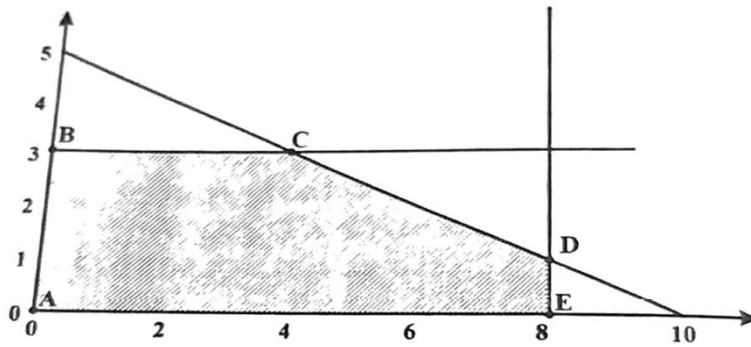
$$\text{قيد الميزانية: } (2) \dots \dots \dots 30X + 60Y \leq 300$$

$$\text{شرط استهلاك السلعة } (B): (3) \dots \dots \dots Y \leq 3$$

$$\text{شرط عدم السلبية: } (4) \dots \dots \dots X \geq 0$$

$$\text{شرط عدم السلبية: } (5) \dots \dots \dots Y \geq 0$$

يمكن تمثيل هذه القيود بيانيا في الشكل التالي:



شكل رقم (1): التمثيل البياني لتوازن المستهلك

تمثل المساحة (A, B, C, D, E) مساحة الحلول الممكنة، حيث القيم المختلفة ملخصة في الجدول التالي:

النقاط	الكمية المستهلكة A	الكمية المستهلكة B	قيمة دالة الهدف	المبلغ المخصص
--------	----------------------	----------------------	-----------------	---------------

من الميزانية	(المنفعة الكلية			
00	00	0	0	
180	120	3	0	
300	200	3	4	
300	200	1	8	
240	160	0	8	

نلاحظ وجود خيارين أمام المستهلك، وكل خيار يمثل في حد ذاته حل أمثل ويعطي نفس درجة الإشباع أو المنفعة، ولكن باستهلاك كميات مختلفة من السلعتين، وهذين الاختيارين هما:

الاختيار الأول: عند النقطة (C) حيث يمكن لهذا الشخص استهلاك أربع وحدات من السلعة (A) وثلاث وحدات من السلعة (B) ويحقق بذلك أقصى منفعة كلية قدرها 200 وحدة منفعة في حدود الميزانية المخصصة والمقدرة بـ 300 وحدة نقدية.

$$\text{أي أن: } X = 4, \quad Y = 300, \quad Z = 200$$

الاختيار الثاني: أما هذا الاختيار فهو يتضح عند النقطة (D) حيث يمكنه استهلاك ثماني وحدات من السلعة (A) مقابل وحدة واحدة فقط من السلعة (B)، ويحقق كذلك أقصى منفعة كلية قدرها أيضا 200 وحدة منفعة وفي نفس الوقت استهلك كامل المبلغ المخصص أو الميزانية.

$$\text{أي أن: } X = 8, \quad Y = 1, \quad Z = 200$$

(2) حالة القيد الزائد عن الحاجة:

في مثل هذه الحالة فإن أحد القيود الذي يشكل المسألة يعتبر زائد عن الحاجة، أي أنه لا يساهم في تحديد نقطة الحل الأمثل، إذ أن المستقيم الممثل لمعادلة هذا القيد يكون بعيدا عن منطقة الحلول الممكنة ولا يؤثر بأي حال على الحل.

مثال (1): لنأخذ المثال رقم (1) ولكن مع افتراض أن هذه المؤسسة لا يمكنها أن تبيع أكثر من 1200 وحدة من النوع (B).

المطلوب: صياغة المشكلة في نموذج مسألة برمجة خطية.

. تحديد التشكيلة الإنتاجية المثلى من النوعين لتحقيق أقصى الأرباح. (باستخدام طريقة الرسم البياني).

حل المثال:

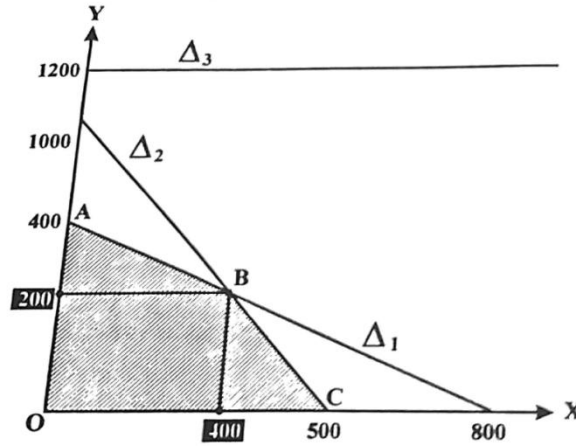
على أساس هذه التغيرات في المسألة، فإن نموذج البرمجة الخطية سيكون كالتالي:

$$[Max]Z = 20X + 30Y$$

$$3X + 6Y \leq 2400 \dots \dots \dots (1)$$

$$2X + Y \leq 1000 \dots \dots \dots (2)$$

يمكن تمثيل هذه القيود في الشكل البياني التالي:



شكل رقم (1): التمثيل البياني للقيود الزائد عن الحاجة

ينتضح من الرسم البياني السابق وجود ثلاثة أنواع من القيود وهي:

1. القيود المشكلة للمسألة والمتمثلة بيانياً في المستقيمات $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$
2. القيود الأساسية المحددة لنقطة الحل الأمثل والمتمثلة في المستقيمين (Δ_1, Δ_2) .
3. القيود الزائدة عن الحاجة والمتمثلة في المستقيم (Δ_3) .

وعلى هذا الأساس وبناء على النتائج المتوصل إليها يمكننا القول أن الحل الأمثل لهذا النموذج هو نفسه الذي تم الوصول إليه سابقاً (حل المثال (2-1)) بحيث لم يحدث أي تغيير على أمثلية الحل على الرغم من التغيير الذي حدث في المسألة، ويعود ذلك لأن القيد المتعلق بتسويق النوع الثاني لا يساهم في منطقة الحلول، وبالتالي فهو قيد زائد عن الحاجة، لأن القيدين الآخرين يلغيان تأثير هذا القيد.

3) حالة عدم وجود حلول على الإطلاق:

قد يحدث أن لا نتمكن أصلاً من تحديد منطقة الحلول المشتركة وهذا يعود لتضارب في القيود والمثال التالي يبين ذلك.

مثال (2-4) (مثال عن الاستثمار):

يريد أحد المقاولين شراء نوعين من الآلات (A, B) تعطي الآلة الواحدة من النوع الأول إيراد قدره 120 وحدة نقدية، أما إيراد الآلة الواحدة من النوع الثاني 100 وحدة نقدية. إن الميزانية التي خصصها هذا المقاول ومقدارها 1200 نقدية لا تسمح بشراء أكثر من خمس آلات من النوعين معاً، لأن تكلفة شراء الآلة الواحدة من النوع الأول هي 400 وحدة نقدية، بينما تكلفة شراء الآلة من النوع الثاني 300 وحدة نقدية.

المطلوب: تحديد عدد الآلات من كل نوع A, B بحيث يتمكن هذا المقاول من تعظيم إيراداته؟.

حل المثال:

لنفرض أن X هي عدد الآلات التي يمكن شراؤها من النوع الأول A وأن Y هي عدد الآلات التي يمكن شراؤها من النوع الثاني B.

وبالتالي فإن نموذج المسألة كالتالي:

$$[MAX]Z = 120X + 100Y \quad \text{دالة الهدف تعظيم الإيرادات:}$$

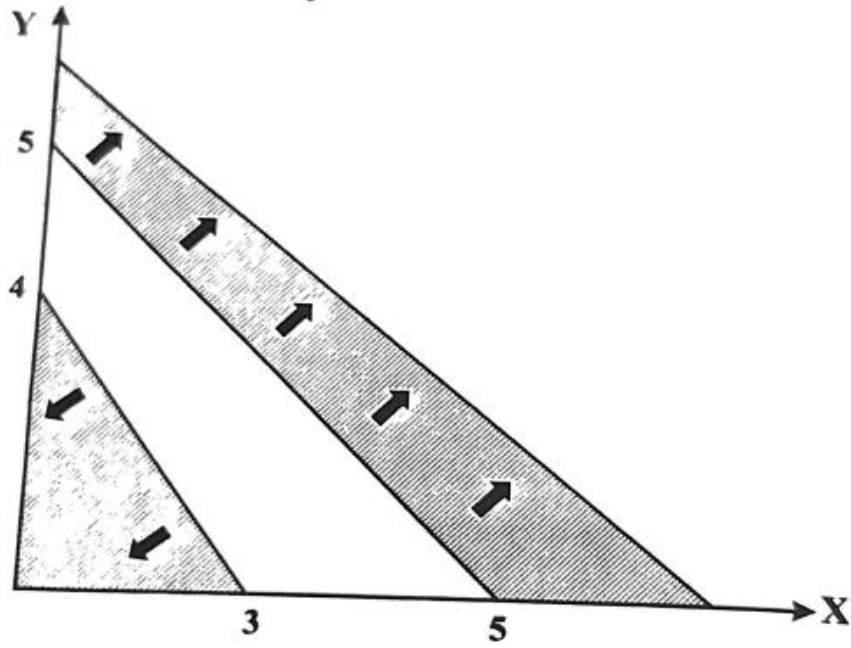
$$X + Y \leq 5 \quad \text{قيد عدد الآلات التي يمكن شراؤها:}$$

$$40X + 30Y \geq 120 \quad \text{قيد الميزانية:}$$

$$X \geq 0 \quad \text{قيد عدم السلبية:}$$

$$Y \geq 0 \quad \text{قيد عدم السلبية:}$$

يمكن تلخيص حل المسألة في الشكل التالي:



شكل رقم () : التمثيل البياني لحالة عدم وجود الحل

يتضح من خلال هذا الشكل أنه لا توجد منطقة الحلول المشتركة لأنه في هذه الحالة القيود متضاربة، وإذا حدث وأن وقع متخذ القرار في مثل هذه الحالة فعليه إعادة النظر في صياغة النموذج صياغة صحيحة، كاقترح تخصيص موارد أخرى، أو إعادة النظر في القيود السابقة.