المحاضرة 01: مسائل البرمجة الخطية

تمهيـــــد:

البرمجة الخطية هي أسلوب رياضي يساعد على اتخاذ أفضل القرارات المتعلقة بالتوزيع أو التخصيص الأمثل لمجموعة من الموارد المحدودة على مجموعة من الاستخدامات المتعددة، وعلى هذا الأساس فإن البرمجة الخطية تبحث عن أفضل الاستعمالات لتحقيق أحسن النتائج، وبذلك فإنها تحقق الكفاءة في استخدام الموارد والفعالية في تحقيق النتائج ، وتشير كلمة خطية إلى أن العلاقة بين المتغيرات المكونة للمسألة المدروسة هي علاقة خطية، بينما تعني كلمة البرمجة الأسلوب أو التقنية الرياضية التي تسمح بالوصول إلى تحديد حل أمثل من بين جملة من الحلول المشتركة تكون عنده قيمة دالة الهدف في حدها الأدنى أو الأقصى حسب طبيعة الهدف.

متطلبات البرمجة الخطية:

لكي يتمكن متخذ القرار في المؤسَّسة من استخدام هذا الأسلوب الرياضي لابد من توفر جملة من الشروط أو المتطلبات وهي:

1. وجود هدف تسعى المؤسَّسة لتحقيقه يمكن التعبير عنه في شكل دالة ، كتخفيض التكاليف تعظيم الأرباح، تقليص استهلاكالمواد... الخ.
2. وجود مجموعة من القيود والشروط التي في ظلها يتم تحقيق الهدف.
3. يجب أن تكون هناك استخدامات متعددة للموارد المتاحة.
4. إمكانية صياغة المسألة في شكل نموذج رياضي.

تطبيقاتالبرمجةالخطية:

فيالحقيقةفإنللبرمجةالخطيةاستخداماتمتعددةوكثيرةجدا،حيثيمكناستعمالهافيالعديدمنميادينالحياةولحلالكثيرمنالمسائلالتيتواجهناعلىأنتستوفيالشروطالمذكورةسابقا،غيرأنناسوفنذكرفقطبعضًامنالمجالاتالتييمكنأناستعمالهافيالمؤسساتمنبينهامايلي:

1. المشاكلالمتعلقةبالإنتاج،كتحديدالتشكيلةالممكنة من مختلفالمنتجاتوكمياتهاممايسمحبتحقيقهدفمعين،وفيظلكمياتمتاحةمنعواملالإنتاجتدخلجميعهافيتشكيلةالإنتاج.

2. تحديدالمزيجالإنتاجيالمتمثلفيالعناصرالتيتُمزجمعبعضهابكيفيةمعينةوبنسبمختلفةللحصولعلىمنتججديد،كصناع ةالأدويةالأغذية،الدهن...الخ.

3. تستعملفياختياروتعيينالأفرادفيالمؤسسةبغرضالقيامبعملياتومهاممختلفة (مسائلالتعيينوالتخصيص).

4. توزيعالموادوالمنتجاتالمتجانسةمنمصادرتواجدهانحوأماكناستخدامها(مسائلالنقل).

5. بالإضافةإلىذلكيمكناستخدامالبرمجةالخطيةفي:تخطيطالإشهار،تخطيطالمخزون،تحديدأماكنإقامةالوحدات... الخ.

عرضمسألةالبرمجةالخطية:

نموذجالبرمجةالخطيةقديكونفيشكلقانوني،أوفيشكلمعياريوتأخذالمسألةالشكلالمعياري (Standard) إذاكانتالقيودعبارةعنمعادلاتعلىالنحوالتالي:

أما إذا كانت قيود المسألة عبارة عن متراجحات أو متباينات فنقول أن المسألة على شكل قانوني (Canonique) وتأخذ إحدى الصيغتين التاليتين:

طرق حل مسألة البرمجة الخطية:

نستطيع النظر لمسألة البرمجة الخطية من زاويتين ، الأولى تسمى المسألة المطروحة (ProblèmePrimal) أو المسألة الأولية، أما الزاوية الثانية تسمى بالمسألة المعكوسة (ProblèmeDual) أو المسالة الثنائية.

تكون المسألة المطروحة بشكل عام على النحو التالي:

....

أما المسألة المعكوسة فتكون بصفة عامة على الشكل التالي:

ولحل أي من المسألتين لدينا الطرق التالية:

1. الطريقة الجبرية.
2. طريقة الرسم البياني
3. الطريقة المبسطة (السميلاكسSimplexe)

ولتقريب الفهم أكثر لنموذج البرمجة الخطية يبدو مفيدا أخذ مثال على ذلك:

مثال (01):سوف نستخدم هذا المثال كنموذج خلال هذا الكتاب لتسهيل الفهمولإمكانية مقارنة الحلول والنتائج المتوصل إليها.

تقوم إحدى المؤسَّسات الإنتاجية بتصنيع نوعين من لعب الأطفال (B,A) لإنتاج الوحدة الواحدة من النوع الأول (A) يتطلب استعمال وحدتي قياس(2) من مادة البلاستيك كمادة أولية، كما أنها تستغرق في ورشة التصنيع 3 ساعات عمل، بينما تتطلب الوحدة الواحدة من النوع (B) وحدة قياس واحدة من المادة الأولية البلاستيك، وتستغرق 6 ساعات عمل بورشة التصنيع، تتوقع المؤسسة أن تتحصل على 1000 وحدة قياس خلال السنة من المادة الأولية البلاستيك المخصصة لإنتاج هذه المنتجات كما أن طاقة ورشة التصنيع المتاحة خلال هذهالفترة هي2400 ساعة عمل.

تقدر المؤسسة أن تحقق ربحا صافيا قدره (20 وحدة نقدية) للوحدة من النوع الأول (A) و (30 وحدة نقدية) من النوع الثاني (B).

المطلوب:

1. صياغة هذه المشكلة في نموذج مسألة البرمجة الخطية.
2. تحديد التشكيلة الإنتاجية المثلى من النوعين لتحقيق أقصى ربح ممكن.

حل المسألة:

قبل صياغة النموذج الرياضي الذي يمثل هذه المسألة لابد من مراعاة إمكانية وجود المتطلبات المذكورة سابقا (متطلبات البرمجة الخطية) وهي:

- من خلال المسألة المطروحة أمامنا يتضح أن المؤسسة تبحث عن أفضل توليفة من لعب الأطفال (A,B) من بين العديد من التوليفات الممكنة، هذه التوليفة تسمح لها بتحقيق الهدف المرجو وهو تعظيمالأرباح.
- إن هذا الهدف تحكمه مجموعة من القيود والشروط التي في ظلها يتم تحقيقه وتتمثل هذه القيود في الموارد المتاحة والمخصصة لإنتاج هذين النوعين ، وهي ساعات عمل ورشة التصنيع والمادة الأولية المتاحةالبلاستيك.
- يتضح أيضا بأن هذه الموارد كما يمكن استعمالها في إنتاج النوع (A) فإنها أيضا يمكن استخدامها في الوقت نفسه لإنتاج النوع الثاني (B) فهي بذلك متعددة الاستخدامات فهي عوامل إنتاج غير قابلة للإحلال. وهذا هو الشرط الأساسي والمهم في البرمجة الخطية وبدونهلا يمكن حل هذه المسائل بطرق البرمجة الخطية.
- ولإمكانية صياغة المسألة في شكل نموذج رياضي لا بد من إعطاء بعض الرموز كما يلي: (ملاحظة: إن وضع الرموز هي عملية مهمة جدا تساعد على تشكيل نموذج المسألة، لذلك فهي تتطلب فهم حقيقي لطبيعة المسألة):
  - ✓ نرمز بالرمز (X) لعدد الوحدات التي يمكن أن تنتجها المؤسسة منالنوع (A).
  - ✓ وبالرمز (Y) لعدد الوحدات التي يمكن أن تنتجها أيضا من النوع (B).
  - ✓ وبالرمز (Z) لقيمة الأرباح المحتمل تحقيقها.

(أ) دالة الهدف:

وهيالمعادلة التي تعبر عن الهدف المُراد تحقيقه، وفي مثالنا هذا يتمثل الهدف في تعظيم الأرباح، فإذا كان الربح في الوحدة الواحدة من النوع (A) 20 وحدة نقدية، فإن الربح المحتمل تحقيقه من الوحدات الممكن إنتاجها هذا النوع هو $20\mathrm{X}$ وحدة نقدية، وإذا كان الربح في الوحدة الواحدة النوع (B) هو $30Y$ وحدة نقدية، فإن الربح

المتوقع تحقيقه من الوحدات الممكر إنتاجها من هذا النوع هو $30Y$ وحدة نقدية، وعليه تكون دالة الهدف هي: $[Max]Z = 20X + 30Y$

(ب) القيود:

القيود هي المعادلات أو المتراجحات (المتباينات) التي تعبر عن ظروف أو شروط المسألة، وفي ظلها سوف يتم اتخاذ القرار واختيار أفضل الحلول، أما في مثالنا فإن هذه الشروط التي تحدد تشكيلة المنتجات هي القيود التالية:

- قيد ساعات العمل: $3X + 6Y \leq 2400$

تعني هذه المتباينة أنه إذا كانت كل وحدة واحدة من النوع الأول (A) تتطلب 3 ساعات عمل في الورشة فإن عدد الوحدات الإجمالية التي يمكن إنتاجها من هذا النوع سوف يستغرق في ورشة التصنيع $3X$ساعة عمل وكذلك الأمر بالنسبة للنوع الثاني الذي يستغرق في هذه الورشة زمن قدره $6Y$ ساعة عمل، وبالتالي فإنه لإنتاج النوعين معا يجب أن لا تتجاوز ساعات العمل الإجمالية 2400 ساعة عمل ، وهي طاقة ورشة التصنيع أو أقصى ساعات العمل المخصصة في هذه الورشة لتصنيع كلا النوعين من لعب الأطفال.

قيد المادة الأولية: $2X + Y \leq 1000$

يشير هذا القيد أن الكميات المستهلكة من المادة الأولية البلاستيك لإنتاج أي تشكيلة من النوعين يجب أن لا تتجاوز الكميات المتاحة لدى المؤسسة من هذه المادة وهي (1000 وحدة قياس)، فإذا كانت الوحدة الواحدة من النوع الأول (A) تتطلب 2 وحدة قياس من مادة البلاستيك، فإن عدد الوحدات الإجمالية الممكن إنتاجها من هذا النوع سوف تستهلك $(2X)$ وحدة قياس من هذه المادة وكذلك الأمر بالنسبة للنوع الثاني (B) الذي يستعمل عن كل وحدة يمكن إنتاجها وحدة قياس واحدة، فإنه سوف يستهلك $(1Y)$ وحدة قياس من المادة الأولية عند إنتاج (Y) وحدة، وعليه فإنه لإنتاج أي كمية من النوعين يجب أن لا يتجاوز الكميات المتاحة من هذه المادة وهي 1000 وحدةقياس.

ج – قيد عدم السلبية (الايجابية) $X \geq 0$ و $Y \geq 0$:

هذا القيد يعني أن عدد الوحدات المنتجة من النوعين $(A$ و $B)$يجب أن لا تكون سالبة لأن ذلك ليس له أي معنى اقتصادي.

وعلى هذا الأساس يمكن جمع النقاط السابقة (أ، ب، ج) للوصول إلى صياغة النموذج الرياضي للمسألة على النحو التالي:

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
[Max]Z = 20X + 30Y \\
3X + 3Y \leq 2400 \\
2X + Y \ \leq 1000 \\
X \geq 0 \\
\hline
\end{array}
$$

ملاحظة: إن العلاقات التي تربط بين المتغيرات في المسألة هي علاقات خطية بحيث لا يمكن أن تظهر في مثل هذه المسائل (مسائل البرمجة الخطية) العلاقات التالية على سبيل المثال:

$\ln Y , \log X \ , X_2, XY$...الخ لأنها ليست خطية.

بعد بناء النموذج الرياضي نشرع في حل هذه المسألة بالطرق المذكورة سابقا.

أولا: طريقة الرسم البياني

تتمثل هذه الطريقة في رسم أو تمثيل مختلف القيود في مستوى منسوب لمعلم متعامد ومتجانس انطلاقا من الشكل المعياري للمسألة، ثم إسقاط ورسم معادلات القيود على محوري الفواصل والتراتيب ، في كل مرة نجعل أحد المتغيرين يساوي الصفر لنحدد قيمة المتغير الآخر.

ففي مثالنا السابق وانطلاقا من القيدين التاليين:

بالنسبة للقيد الأول Δ_1:

نفرض أن$(X = 0)$ نعوض هذه القيمة في المتباينة الأولى على النحوالتالي:

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
3(0) + 6Y \ \leq 2400 \\
\therefore Y \ \leq \left(\dfrac{2400}{6}\right) \\
\therefore Y \ \leq \ 400 \qquad Y \in [0; 400] \\
\hline
\end{array}
$$

ولما نضع المتغير الآخر معدوم $(\mathrm{Y} = 0)$ فإننا سنتحصل على:

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
3X + 6(0) \ \leq 2400 \\
\therefore X \ \leq \left(\dfrac{2400}{3}\right) \\
\therefore X \ \leq \ 800 \qquad X \in [0 \quad 800] \\
\hline
\end{array}
$$

مما سبق يمكننا القول أن حلول هذه المتراجحة أو المتباينة هي جميع الثنائيات $(X,Y) \le (800,400)$ بيانيا هي النقاط التي تقع على المستقيم Δوما دونه.

اما بالنسبة للقيد الأول Δ_1:

نفرض أن $(X = 0)$ نعوض هذه القيمة في المتراجحة الأولى علىالنحو التالي:

$$\boxed{\begin{array}{l} 2(0) + Y \le 1000 \\ \therefore Y \le 10000 \qquad Y \in [0 \ \ 1000] \end{array}}$$

بينما عندما نضع المتغير الثاني يساوي الصفر $(\mathrm{Y} = 0)$ فإنناسنتحصل على:

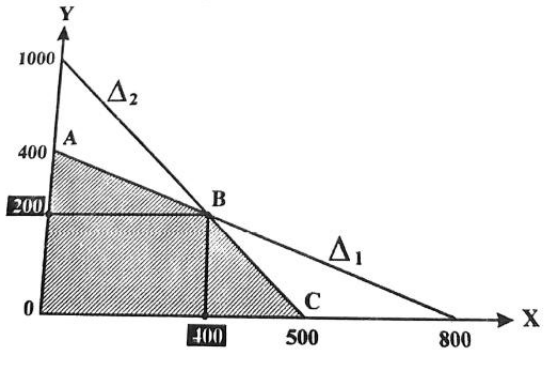
$$\boxed{\begin{array}{l} 2X + 0 \le 1000 \\ \therefore X \le \left(\dfrac{1000}{2}\right) \\ \therefore X \le 500 \qquad Y \in [0 \quad 500] \end{array}}$$

مما سبق نقول أن حلول هذه المتراجحة هي جميع الثنائيات $(X,Y) \le (500,1000)$ وبيانيا هي النقاط التي تقع على المستقيم Δ_2 ومادونه.

مما سبق فإنه يمكن تلخيص حلول جملة المتراجحتين (1) و(2) فيالجدول التالي:

القيــود		
الحلول المشتركة		

ويمكن تمثيل هذه الجلول بيانيا في الشكل الموالي:



الشكل رقم ( ): منطقة الحلول الممكنة

تسمى المساحة المحصورة بين النقاط (C, B, A, O) بمنطقة أو مساحة الحلول الممكنة، حيث أن أي نقطة ضمن هذه المنطقة تعطي حلا للمسألة ، لكنها ليست كلها حلولا مثلى، ولتحديد أي منها حل أمثل نقوم بمقارنة قيمة دالة الهدف عند مختلف نقاط الحدود أو أطراف مساحة الحلول الممكنة.

1- عند النقطة (A) حيث $X = 0$ و $Y = 400$ تكون قيمة دالة الهدف:

وتكون قيمة القيود:

قيد ساعات العمل: $3(0) + 6\ (400) = 2400$

قيد المادة الأولية: $2(0) + 1(400) = 400$

الملاحظ أنه عند هذه النقطة، أي فيما لو تنتج المؤسسة 400 وحدة من النوع الثاني فقط، فإن هذا سيؤدي حتما لاستغلال كامل لساعات العمل ، أما بالنسبة للمادة الأولية فإنها غير مستغلة تماما بل يبقى منها 600 وحدة قياس بإمكان استغلالها في إنتاج كميات إضافية.

2-عند النقطة (B) حيث $X = 400$ و $Y = 200$ تكون قيمة دالة الهدف:

وتكون قيمة القيود:

قيد ساعات العمل: $3(400) + 6\ (200) = 2400$

قيد المادة الأولية: $2(400) + 1(200) = 1000$

الملاحظ أنه عند هذه النقطة تكون كل الموارد المخصصة قد استغلت بالكامل وأن قيمة دالة الهدف أفضل من الحل السابق.

3-عند النقطة (C) حيث $X = 500$ و $Y = 0$ فإن قيمة دالة الهدف هي:

وتكون المواد المستهلكة هي:

بالنسبة لساعات العمل: $3(500) + 6(0) = 1500$ (وتبقى منها 900 ساعة غير مستغلة)

أما المادة الأولية $2(500) + 1(0) = 1000$ (فهي مستغلة تماما)

4−عند النقطة (0) حيث $X = 0$ و $Y = 0$ فإن قيمة دالة الهدف هي:

وتكون قيمة القيود:

قيد ساعات العمل: $3(0) + 6\,(0) = 0$

قيد المادة الأولية: $2(0) + 1(0) = 0$

يسمى الحل عند هذه النقطة بالحل المبدئي أو الحل القاعدي نلجأ إليه للانطلاق في عملية تحسين الحل، ولكن من الناحية الاقتصادية ليس له أي معنى.

يمكن تلخيص نتائج الحل حسب طريقة الرسم البياني في الجدول التالي:

الحلول الممكنة	قيد ساعات العمل	قيد المادة الأولية	قيمة دالة الهدف
النقطة (A)	2400 ساعة عمل مستغلة تمامًا	400 وحدة قياس مستغلة فقط	12000 وحدة نقدية
النقطة (B)	2400 ساعة عمل مستغلة تمامًا	1000 وحدة قياس مستغلة فقط	1400 وحدة نقدية
النقطة (C)	1500 ساعة عمل مستغلة فقط	1000 وحدة قياس مستغلة تماما	10000 وحدة نقدية
النقطة (O)	2400 ساعة عمل غير مستغلة	1000 وحدة قياس غير مستغلة	00 وحدة نقدية

بمقارنة الحلول المختلفة عند النقاط C, B, A, O, يتضح وأن الحل الأمثل يكون عند النقطة $B(400{,}200)$ حيث يمكن إنتاج 400 وحدة من النوع (A,) و 200 وحدة من النوع (B) وتحقق المؤسسة أقصى ربح وقدره 14000 وحدة نقدية مع الاستغلال الكامل للموارد المتاحة (ساعات العمل والمادة الأولية).

الحالات الخاصة لطريقة الرسم البياني:

1−حالة وجود أكثر من حل أمثل واحد:

في بعض الحالات نتحصل على حلول متعددة للمسألة تعطي قيما متساوية لدالة الهدف وتسمى بالحلول البديلة، هذه الأخيرة تمنح للمؤسسة مجالاً واسعًا للاختيار، وفقا لما تراه مناسبا . أنظر المثال ($10-2$) والجدول($19-2$).

مثال () (مثال حول توازن المستهلك) :

لنفرض أن أحد المستهلكين يبحث عن تحديد أفضل توليفة ممكنة من السلعتين (A, B) في حدود ميزانيته المقدرة بمبلغ 300 وحدة نقدية، على أن لا تتجاوز عدد الوحدات المستهلكة من السلعة الأولى $(A,)$ 08 وحدة، ومن السلعة الثانية (B) 03 وحدات ، فإذا كانت المنفعة الناتجة عن استهلاك الوحدة الواحدة من السلعة (A) هي 20 وحدة قياس أما المنفعة الناتجة عن استهلاك السلعة (B) فهي 40 وحدة قياس منفعة.

المطلوب:

ما هي التوليفة المثلى من السلعتين علما أن سعر الوحدة الواحدة من السلعة A هو 30 وحدة نقدية وسعر الوحدة من السلعةB هو 60 وحدة نقدية؟

حل المثال:

نفرض أن (X) هي عدد الوحدات التي يمكن لهذا الشخص استهلاكها من السلعة (A) وأن (Y) هي عدد الوحدات التي يمكنه استهلاكها من السلعة (B). بناء على هذه الرموز يمكننا صياغة المسألة في النموذج التالي:

دالة المنفعة الكلية: $[MAX]Z = 20X + 40Y$

شرط استهلاك السلعة (A):(1) .... $X \leq 8$

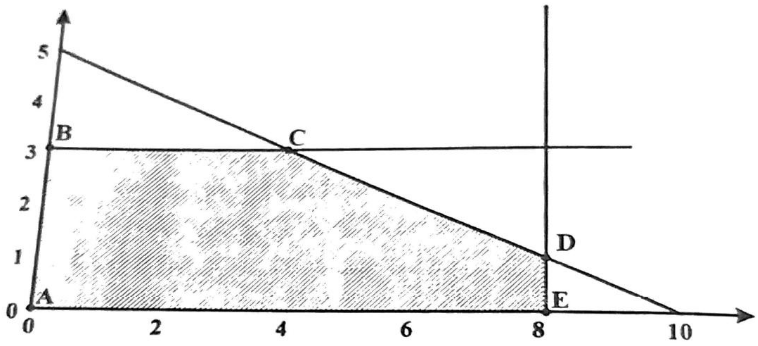
قيد الميزانية:(2) .... $30X + 60Y \leq 300$

شرط استهلاك السلعة (B):(3) .... $Y \leq 3$

شرط عدم السلبية: (4) .... $X \geq 0$

شرط عدم السلبية: (5) .... $Y \geq 0$

يمكن تمثيل هذه القيود بيانيا في الشكل التالي:



شكل رقم (): التمثيل البياني لتوازن المستهلك

تمثل المساحة (A, B, C, D, E) مساحة الحلول الممكنة، حيث القيمالمختلفة ملخصة في الجدول التالي:

النقاط	الكمية المستهلكةA	الكمية المستهلكةB	قيمة دالة الهدف (المنفعة الكلية)	المبلغ المخصص من الميزانية
	0	0	00	00
	0	3	120	180
	4	3	200	300
	8	1	200	300
	8	0	160	240

نلاحظ وجود خيارين أمام المستهلك، وكل خيار يمثل في حد ذاته حل أمثل ويعطي نفس درجة الإشباع أو المنفعة، ولكن باستهلاك كميات مختلفة من السلعتين، وهذين الاختيارين هما:

الاختيار الأول :عند النقطة (C) حيث يمكن لهذا الشخص استهلاك أربع وحدات من السلعة (A) وثلاث وحدات من السلعة (B) ويحقق بذلك أقصى منفعة كلية قدرها 200 وحدة منفعة في حدودالميزانية المخصصة والمقدرة بـ 300 وحدة نقدية.

أي أن: $X = 4 \quad , \quad Y = 300 \quad , \quad Z = 200$

الاختيار الثاني : أما هذا الاختيار فهو يتضح عند النقطة (D) حيث يمكنه استهلاك ثماني وحدات من السلعة(A) مقابل وحدة واحدةفقط من السلعة (B)، ويحقق كذلك أقصى منفعة كلية قدرها أيضا 200 وحدة منفعة وفي نفس الوقت استهلك كامل المبلغ المخصص أو الميزانية.

أي أن:$X = 8$ $Y = 1$, $Z = 200$,

2) حالة القيد الزائد عن الحاجة:

في مثل هذه الحالة فإن أحد القيود الذي يشكل المسألة يعتبر زائد عن الحاجة، أي أنه لا يساهم في تحديد نقطة الحل الأمثل، إذ أن المستقيم الممثل لمعادلة هذا القيد يكون بعيدا عن منطقة الحلول الممكنة ولا يؤثر بأي حالعلى الحلول

مثال ():لنأخذ المثال رقم (1) ولكن مع افتراض أن هذه المؤسسة لا يمكنها أن تبيع أكثر من 1200 وحدة من النوع (B).

المطلوب: صياغة المشكلة في نموذج مسألة برمجة خطية.

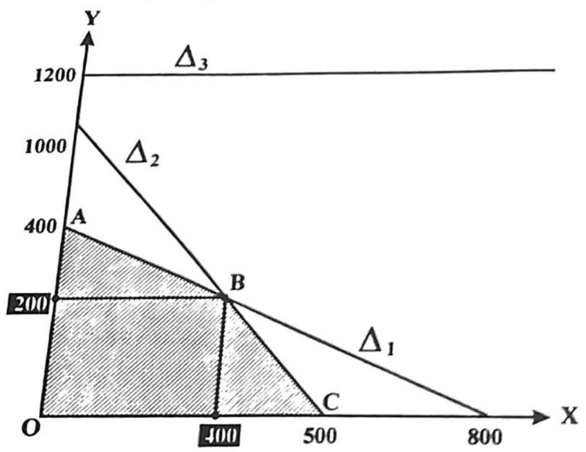
. تحديد التشكيلة الإنتاجية المثلى من النوعين لتحقيق أقصى الأرباح. (باستخدام طريقة الرسم البياني).

حل المثال:

على أساس هذه التغيرات في المسألة، فإن نموذج البرمجة الخطيةسيكون كالتالي:

$$[Max]Z = 20X + 30Y$$
$$3X + 6Y \leq 2400 \ldots\ldots\ldots(1)$$
$$2X + Y \leq 1000 \ldots\ldots\ldots(2)$$

يمكن تمثيل هذه القيود في الشكل البياني التالي:



شكل رقم (): التمثيل البياني للقيد الزائد عن الحاجة

يتضح من الرسم البياني السابق وجود ثلاثة أنواع من القيود وهي:

1. القيود المشكلة للمسألة والمتمثلة بيانيا في المستقيمات $(\Delta_1,\ \Delta_2\ ,\Delta_3)$
2. القيود الأساسية المحددة لنقطة الحل الأمثل والمتمثلة في المستقيمين $(\Delta_1,\ \Delta_2)$.
3. القيود الزائدة عن الحاجة والمتمثلة في المستقيم (Δ_3) .

وعلى هذا الأساس وبناء على النتائج المتوصل إليها يمكننا القول أن الحل الأمثل لهذا النموذج هو نفسه الذي تم الوصول إليه سابقا (حل المثال (2−1) بحيث لم يحدث أي تغيير على أمثلية الحل على الرغم من التغيير الذي حدث في المسألة، ويعود ذلك لأن القيد المتعلق بتسويق النوع الثاني لا يساهم في رسم وتحديد منطقة الحلول، وبالتالي فهو قيدٌ زائد عن الحاجة، لأن القيدين الآخرين يلغيان تأثير هذا القيد.

3) حالة عدم وجود حلول على الإطلاق:

قد يحدث أن لا نتمكن أصلاً من تحديد منطقة الحلول المشتركة وهذايعود لتضارب في القيود والمثال التالي يبين ذلك.

مثال (4−2) (مثال عن الاستثمار):

يريد أحد المقاولين شراء نوعين من الآلات (A, B) تعطي الآلة الواحدة من النوع الأول إيراد قدره 120 وحدة نقدية، أما إيراد الآلة الواحدة من النوع الثاني 100 وحدة نقدية. إن الميزانية التي خصصها هذا المقاول ومقدارها 1200 نقدية لا تسمح بشراء أكثر من خمس آلات من النوعين معا، لأن تكلفة شراء الآلة الواحدة من النوع الأول هي 400 وحدة نقدية، بينما تكلفة شراء الآلة من النوع الثاني 300 وحدة نقدية.

المطلوب: تحديد عدد الآلات من كل نوع A, Bبحيث يتمكن هذا المقاول منتعظيم إيراداته ؟.

حل المثال:

لنفرض أن X هي عدد الآلات التي يمكن شرا ؤها من النوع الأول A وأنYهي عدد الآلات التي يمكن شراؤها من النوع الثانيB.

وبالتالي فإن نموذج المسألة كالتالي:

دالة الهدف تعظيمالإيرادات: $[MAX]Z = 120X + 100Y$

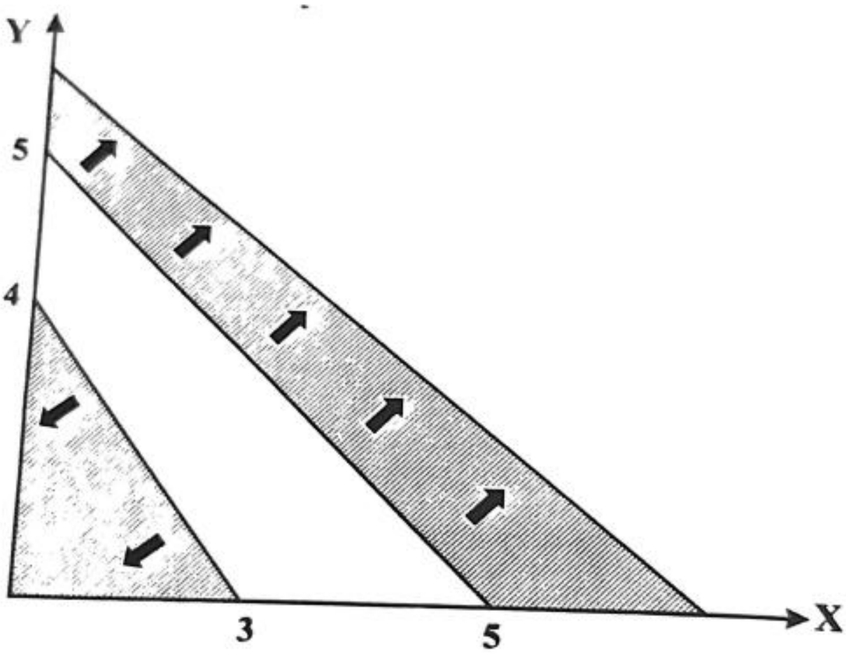
قيد عدد الآلات التي يمكن شراؤها: $X + Y \leq 5$

قيد الميزانية: $40X + 30Y \geq 120$

قيد عدم السلبيِة: $X \geq 0$

قيد عدم السلبِية: $Y \geq 0$

يمكن تلخيصحل المسألة في الشكل التالي:



شكل رقم ( ): التمثيل البياني لحالة عدم وجود الحل

يتضح من خلال هذا الشكل أنه لا توجد منطقة الحلول المشتركة لأنه في هذه الحالة القيود متضاربة، وإذا حدث وأن وقع متخذ القرار في مثل هذه الحالة فعليه إعادة النظر في صياغة النموذج صياغة صحيحة، كاقتراح تخصيص موارد أخرى، أو إعادة النظر في القيود السابقة.