حل البرامج الخطية:

طريقة السمبلكس (Simplex)

يتم إستخدام طريقة السمبلكس (أو طريقة الجداول كما تُسمى أحيانا) في حل جميع مسائل البرمجة الخطية القابلة للحل، ومهما كان عدد متغيراتها، حيث رأينا أن الطريقة البيانية تقتصر على حل البرامج الخطية التي تحتوي على متغيرتين فقط، أما طريقة السمبلكس فهي طريقة عامة وذات امكانيات هائلة.

1. خطوات الحل بطريقة السمبلكس:

الخطوة الأولى: تحويل كل متباينات القيود إلى معادلات (التحول الى الصيغة النموذجية)

في حالة قيد " أصغرمن أو يساوي " :

•نظيف متغيرة مكملة نرمز لها بـ X_j^C، حيث "j" هو ترتيب المتغيرة، و"c" تعني مكملة أي **c**omplémentaire

•ينبغي إدخال المتغيرات المكملة إلى دالة الهدف لكن بمعاملات تساوي الصفر.

في حالة قيد " أكبر من أو يساوي":

•نطرح متغيرة مكملة نرمز لها بـ X_j^C ، حيث "j" هو ترتيب المتغيرة، و"c" تعني مكملة أي **c**omplémentaire

•يتم الاستعانة بمتغيرات اصطناعية X_j^a يُفترض أن تكون قيمتها معدومة ومعاملها يساوي 1+ حيث "j" هو ترتيب المتغيرة و"a" تعني اصطناعية أي **a**rtificielle

•ينبغي إدخال المتغيرات المكملة والإصطناعية إلى دالة الهدف، الأولى بمعاملات تساوي الصفر، والثانية بمعاملات يُفترض أن تكون كبيرة جدا يُرمز إليها بـ "M"، وتكون إشارة هذه الأخيرة كما يلي:

- **في حالة التعظيم**: سالبة
- **في حالة التدنية**: موجبة

في حالة قيد "يساوي":

- يتم الاستعانة بمتغيرات إصطناعية X_j^a يُفترض أن تكون قيمتها معدومة ومعاملها يساوي +1
- ينبغي إدخال المتغيرات الاصطناعية إلى دالة الهدف مع معاملات يُفترض أن تكون كبيرة جدا يُرمز إليها ب "M"، وتكون إشارة هذه الأخيرة كما يلي:

- في حالة التعظيم: سالبة

- في حالة التدنئة: موجبة

مثال:

$$Z_{max}=c_1x_1+c_2x_2$$

$$s/c\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \geq b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2 = b_3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1- التحول إلى الصيغة النموذجية:

$$Z_{max}=c_1x_1+c_2x_2 +0x^c_3 +0x^c_4 -M\,x^a_5 - M\,x^a_6$$

$$s/c\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 + x^c_3 = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 - x^c_4 + x^a_5 = b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2 + x^a_6 = b_3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x^c_3 \geq 0,\ x^c_4 \geq 0,\ x^a_5 \geq 0,\ x^a_6 \geq 0 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: كتابة الحل الأساسي الأول

يتم كتابة الحل الأساسي الأول حسب الجدول التالي:

Ci	Xi	x_1	x_2	x_3^c	x_4^c	x_5^a	x_6^a	b_i
0	x_3^c	a_{11}	a_{12}	1	0	0	0	b_1
-M	x_5^a	a_{21}	a_{22}	0	-1	1	0	b_2
-M	x_6^a	a_{31}	a_{32}	0	0	0	1	b_3
	C_j	c_1	c_2	0	0	-M	-M	
	Zj	$-a_{21}M - a_{31}M$	$-a_{22}M - a_{32}M$	0	M	-M	-M	
	Δ_j	$c_1+M(a_{21}+ a_{31})$	$c_2+M(a_{22}+ a_{32})$	0	-M	0	0	$Z= -M(b_2+b_3)$

حيث:

X_i: متغيرات الأساس.

C_i: معاملات متغيرات الأساس في دالة الهدف.

C_j: معاملات دالة الهدف الأصلية.

Δ_j: مقدار صافي الربح (صافي التكلفة) عند إدخال وحدة واحدة من المتغيرة إلى الأساس

$$Z_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ij} C_i$$ حيث n هو عدد القيود

$$\Delta j = C_j - Z_j$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i$$ حيث n هو عدد القيود

الخطوة الثالثة: الأمثلية

يكون الحل أمثل عندما:

- **في حالة التعظيم:** تكون كل عناصر Δ_j سالبة أو معدومة.
- **في حالة التدنية:** تكون كل عناصر Δ_j موجبة أو معدومة.

وإذا لم يتحقق الحل الأمثل فإننا ننتقل إلى الخطوة الرابعة

الخطوة الرابعة: البحث عن الحلول الأساسية التالية

في حالة عدم تحقق الأمثلية فإننا نكتب الحل الأساسي التالي كما يلي:

البحث عن عمود عنصر الارتكاز لتحديد المتغيرة التي تدخل إلى الأساس:

في حالة التعظيم: نحدد أكبر قيمة موجبة في السطر"Δ_j"، والمتغيرة التي تمثل العمود الذي يحتوي على هذه القيمة هي المتغيرة التي تدخل إلى الأساس.

في حالة التدنية: نحدد أقل قيمة من بين القيم السالبة في السطر "Δ_j"، والمتغيرة التي تمثل العمود الذي يحتوي على هذه القيمة هي المتغيرة التي تدخل إلى الأساس.

في حالة تساوي أكبر قيمتين موجبتين أو أكثر في حالة التعظيم، أو تساوي أقل قيمتين من بين القيم السالبة في حالة التدنية، فإنه يتم إختيار إحداهما.

البحث عن صف عنصر الارتكاز لتحديد المتغيرة التي تخرج من الأساس:

نقسم عمود الثوابت bi على قيم عمود عنصر الارتكاز، والصف التي تنتمي إليه أصغر قيمة موجبة هو صف عنصر الارتكاز، والمتغيرة الواقعة في هذا الصف في العمود X_i هي المتغيرة التي تخرج من الأساس؛

عنصرالارتكاز:

هي نقطة تقاطع عمود عنصرالارتكاز وصف عنصرالارتكاز

ويتم إعداد جدول الحل الأساسي الموالي كما يلي:

- نستبدل المتغيرة التي ستخرج من الأساس بالمتغيرة التي ستدخل إلى الأساس وذلك في العمود X_i؛

- نقوم بتحويل عمود عنصر الارتكاز إلى عمود أحادي، حيث يتحول عنصر الارتكاز إلى القيمة 1 وباقي عناصر العمود إلى قيم معدومة؛

- يتم تحويل سطر عنصر الارتكاز بتقسيم جميع عناصره على قيمة عنصر الارتكاز.

- أما باقي العناصر فيتم حسابها على النحو التالي: العنصر المرشح للتغيير نطرح منه مضروب العنصرين المقابلين له في كل من سطر عنصر الارتكاز وعمود عنصر الارتكاز مقسوما على قيمة عنصر الارتكاز.

فإذا افترضنا أن القيمة A في الجدول التالي هي عنصر الارتكاز:

A	B
C	D

فإن عملية التحويل تكون كما يلي:

1	$\frac{B}{A}$
0	$D-\left(\frac{B\times C}{A}\right)$

وبعد الانتهاء من إعداد جدول الحل الأساسي التالي، نعود مرة أخرى إلى الخطوة رقم 3. وعند تحقق الأمثلية فإن المتغيرات الداخلة في الأساس تساوي القيم المقابلة لها في عمود الثوابت، وبقية المتغيرات تكون معدومة، أما قيمة دالة الهدف المثلى فهي عبارة عن قيمة Z.

مثال:

$$Z_{max}=6x_1+7x_2$$

$$s/c\begin{cases}2x_1+3x_2\leq 12\\2x_1+x_2\leq 8\\x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\end{cases}$$

الحل:

تحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة النموذجية:

$$s/c\begin{cases}Z_{max}=6x_1+7x_2+0\,x^c_3+0\,x^c_4\\2x_1+3x_2+x^c_3=12\\2x_1+x_2+x^c_4=8\\x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x^c_3\geq 0,\ x^c_4\geq 0\end{cases}$$

جدول الحل الأساسى رقم 1:

Ci	Xi	x_1	x_2	x^c_3	x^c_4	b_i	bi/x^*_{ij}
0	x^c_3	2	3	1	0	12	4
0	x^c_4	2	1	0	1	8	8
	Cj	6	7	0	0		
	Z_j	0	0	0	0		
	Δ_j	6	7	0	0	Z=0	

صف عنصر الارتكاز

عمود عنصر الارتكاز

الخلية 2،1: $6-\frac{14}{3}=\frac{4}{3}$

الخلية 2، 3: $0-\left(\frac{1\times1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$

الخلية 2، 4: $1-\left(\frac{0\times1}{3}\right)=1$

b2: $8-\left(\frac{12\times1}{3}\right)=4$

جدول الحل الأساسى رقم 2:

Ci	Xi	x_1	x_2	x_3^c	x_4^c	b_i	bi/x^*_{ij}
7	x_2	2/3	1	1/3	0	4	6
0	x_4^c	4/3	0	-1/3	1	4	3
	Cj	6	7	0	0		
	Z_j	14/3	7	7/3	0		
	Δ_j	4/3	0	-7/3	0	Z=28	

صف عنصر الارتكاز

عمود عنصر الارتكاز

جدول الحل الأساسى رقم 3:

Ci	Xi	x_1	x_2	x_3^c	x_4^c	b_i
7	x_2	0	1	1/2	-1/2	2
6	x_1	1	0	-1/4	3/4	3
	Cj	6	7	0	0	
	Z_j	6	7	2	1	
	Δ_j	0	0	-2	-1	Z=32

وبما أن جميع قيم Δ_jأصبحت سالبة أو معدومة فإننا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل. ومنه فإن القيم المثلى للمتغيرات هي:

$x_1=3, x_2=2, x^c_3=0, x^c_4=0$

والربح الكلي هو: $Z_{max}=32$ وحدة نقدية

مثال:

$$Z_{min}=3x_1+10x_2$$

$$s/c \begin{cases} 5x_1+6x_2 \geq 10 \\ 2x_1+7x_2 \geq 14 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

تحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة النموذجية:

$$Z_{min}=3x_1+10x_2+0\ x^c_3+M\ x^a_4+0\ x^c_5+Mx^a_6$$

$$5x_1+6x_2-x^c_3+x^a_4=10$$

$$2x_1+7x_2-x^c_5+x^a_6=14$$

جدول الحل الأساسي رقم 1:

Ci	Xi	x_1	x_2	x_3^c	x_4^a	x_5^c	x_6^a	b_i	bi/x^*_{ij}
M	x_4^a	5	6	-1	1	0	0	10	5/3
M	x_6^a	2	7	0	0	-1	1	14	2
	C_j	3	10	0	M	0	M		
	Zj	7M	13M	-M	M	-M	M		
	Δ_j	3-7M	10-13M	M	0	M	0	Z=24M	

صف عنصر الارتكاز

عمود عنصر الارتكاز

جدول الحل الأساسي رقم 2:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_5^c	X_6^a	bi	bi/x^*_{ij}
10	X_2	5/6	1	-1/6	0	0	5/3	-10
M	X_6^a	-23/6	0	7/6	-1	1	7/3	2
	C_j	3	10	0	0	M		
	Zj	25/3-23/6M	10	-5/3+7/6M	-M	M		
	Δ_j	-16/3+23/6M	0	5/3-7/6M	M	0	Z=50/3+7/3M	

صف عنصر الارتكاز

عمود عنصر الارتكاز

جدول الحل الأساسي رقم 3:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_5^c	bi
10	X_2	2/7	1	0	-1/7	2
0	X_3^c	-23/7	0	1	-6/7	2
	C_j	3	10	0	0	
	Zj	20/7	10	0	-10/7	
	Δ_j	1/7	0	0	10/7	Z=20

وبما أن جميع قيم Δ_j أصبحت موجبة أو معدومة فإننا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل. ومنه فإن القيم المثلى للمتغيرات هي:

$x_1=0,\ x_2=2,\ ,\ x^c_3=2,\ x^c_5=0$

والتكلفة الكلية هي:

Zmin=20 وحدة نقدية

2. حالات خاصة

1- *عدم توفر شرط عدم سالبية المتغيرات:*

1.1. إذا كانت إشارة المتغيرة أقل من أو تساوي الصفر، أي $X_j \leq 0$: في هذه الحالة يتم افتراض أن $X_j = -X_j'$ حيث $X_j' \geq 0$، ثم يتم تعويض Xj في البرنامج الأصلي حسب الإفتراض، ثم نقوم بحل البرنامج الخطي الجديد بطريقة عادية حتى نصل إلى الحل الأمثل، وبعد هذا نحول المتغيرة X_j' إلى أصلها وفق الإفتراض.

مثال:

$$Z_{max} = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

نفترض أن: $X_2 = -X_2'$

وبعد التعويض في البرنامج الخطي الأصلي نحصل على البرنامج الخطي الجديد التالي:

$$Z_{max} = c_1 x_1 - c_2 x'_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x'_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x'_2 \leq b_2 \\ x_1 \geq 0,\ x'_2 \geq 0 \end{cases}$$

2.1.إذا كانت المتغيرة حرة، أي $X_j \in (-\infty,+\infty)$ في هذه الحالة يتم افتراض أن $X_j = X_j' - X_j''$ حيث $X_j' \geq 0$ و $X_j'' \geq 0$، ثم يتم تعويض Xj في البرنامج الأصلي وفق الإفتراض، ثم نقوم بحل البرنامج الخطي بطريقة عادية حتى نصل إلى الحل الأمثل وبعد هذا نقوم بإيجاد قيمة المتغيرة الأصلية وفق الإفتراض.

مثال:

$$Z_{max} = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2\ \forall \end{cases}$$

نفترض أن: $X_2 = X_2' - X_2''$

وبعد التعويض في البرنامج الخطي الأصلي نحصل على البرنامج الخطي الجديد التالي:

$$Z_{max} = c_1x_1 + c_2(x_2' - x_2'')$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\ (x'_2 - x_2'') \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\ (x'_2 - x_2'') \leq b_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2' \geq 0,\ x_2'' \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$Z_{max} = c_1x_1 + c_2x_2' - c_2x_2''$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}x_2' - a_{12}\ x_2'' \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2' - a_{22}x_2'' \leq b_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2' \geq 0,\ x_2'' \geq 0 \end{cases}$$

2- انعدام وجود حل امثل:

إذا وصلنا إلى حالة الحل الأمثل سواء في حالة التعظيم أو التدنية وبقيت هناك متغيرة إصطناعية أو أكثر داخل الأساس فإن هذا معناه عدم وجود حل أمثل، وهو يوحي بوجود خطأ في تركيب البرنامج.

مثال:

لنفترض أن الجدول الحل الأساسي التالي هو جدول الحل الأمثل لبرنامج خطي في حالة التعظيم:

Ci	Xi	X_1	X_2	X_3^c	X_4^a	b_i
5	X_2	-1/2	1	-3	0	7
-M	X_4^a	-1	0	-2	1	9
	C_j	3	5	0	-M	
	Zj	-5/2+M	5	-15+2M	-M	
	Δ_j	-1/2-M	0	15-2M	0	Z=35-9M

يُلاحظ أن الحل مستحيل لوجود المتغيرة الإصطناعية X_4^a داخل الأساس.

3-عدم محدودية الحل:

وهي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود الارتكاز اقل أو تساوي صفر، حيث يستحيل اختيار المتغيرة التي تخرج من الأساس.

مثال:

ليكن جدول الحل الأساسي التالي لبرنامج خطي في حالة التعظيم:

Ci	**Xi**	x_1	x_2	x_3^c	x_4^c	b_i	bi/x^*_{ij}
3	x_1	1	0	1/2	0	6	-
0	x_4^c	0	-2	1	1	9	-9/2
	C_j	3	4	0	0		
	Zj	3	3	3/2	0		
	Δ_j	0	1	-3/2	0	Z=18	

عمود عنصر الارتكاز

يُلاحظ أن الحل غير محدود لأن جميع قيم عمود عنصر الإرتكاز سالبة ومعدومة.

4- التفكك :

نكون أمام هذه الحالة عندما تتساوى قيمتين على الأقل من القيم المتحصل عليها من قسمة قيم عمود الثوابت على القيم المقابلة لها في عمود عنصر الإرتكاز وهو ما يعني وجود متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس. وعند حدوث مثل هذه الحالة فإننا نختار إحدى القيم.

مثال :

لنفترض أن الجدول التالي هو جدول حل أساسي لبرنامج خطي في حالة التعظيم:

Ci	Xi	x_1	x_2	x_3^c	x_4^c	b_i	bi/x^*_{ij}
0	x_3^c	4	2	1	0	8	2
0	x_4^c	6	1	0	1	12	2
	C_j	5	2	0	0		
	Zj	0	0	0	0		
	Δ_j	5	2	0	0	Z=0	

صف عنصر الارتكاز

عمود عنصر الارتكاز

يُلاحظ تساوي القيمتان المتحصل عليهما من قسمة قيمتا عمود الثوابت على القيم المقابلة لهما في عمود عنصر الإرتكاز. ويُمكن إختيار إحداهما، وبالتالي يُمكن إخراج إما المتغيرة x_3^c أو المتغيرة x_4^c.

ملاحظة: إذا كانت إحدى المتغيرات من بين متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس هي متغيرة إصطناعية فمن الأفضل إخراج هذه المتغيرة.

5- ما لا نهائية الحلول المثلى :

تحدث هذه الحالة إذا أخذت على الأقل متغيرة من متغيرات خارج الأساس قيمة معدومة في السطر $C_j - Z_j$ من جدول الحل الأمثل، حيث يؤدي هذا إلى حالة ما لا نهائية الحلول المثلى، بمعنى أنه يُمكن الحصول على نفس قيمة دالة الهدف بأكثر من تشكيلة من متغيرات الأساس. ومثل هذه الحالة تتيح للإدارة إختيارات غير محدودة عند عملية إتخاذ القرار.

مثال:

C_i^B	X_i^B \ Cj	1	1	0	0	b_i
		X_1	X_2	S_1	S_2	
1	X_1	1	0	1/2	-5/4	15/4
1	X_2	0	1	-1/2	7/4	7/4
	Zj	1	1	0	1/2	
	Cj-Zj	0	0	0	-1/2	Z=11/2