

Table des matières

1	<i>Formule de Taylor et Développements limités</i>	2
1.1	<i>Formule de Taylor</i>	2
1.1.1	<i>Formule de Taylor</i>	2
1.1.2	<i>Théorème de Taylor</i>	3
1.1.3	<i>Formule de Taylor avec le reste de Lagrange</i>	4
1.1.4	<i>Formule de Maclaurin</i>	5
1.1.5	<i>Formule de Taylor avec le reste de Young</i>	5
1.2	<i>Développements limités</i>	5
1.2.1	<i>Développements limités au voisinage de 0</i>	5
1.2.2	<i>Unicité du développement limité</i>	7
1.2.3	<i>Obtention de développement limité à l'aide de la formule de Taylor-Young</i>	7
1.2.4	<i>Développements limités des fonctions usuelles obtenir par la formule de Maclaurin</i>	7
1.2.5	<i>Opérations sur les développements limités</i>	9
1.2.6	<i>L'intégration d'un développement limité</i>	13
1.2.7	<i>Dérivation d'un développement limité</i>	13
1.2.8	<i>Développement limité au voisinage d'un point x_0</i>	14
1.2.9	<i>Développement limité généralisé</i>	15

Chapitre 1

Formule de Taylor et Développements limités

1.1 *Formule de Taylor*

1.1.1 *Formule de Taylor*

Une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable en $x_0 \in]a, b[$ peut s'écrire au voisinage de x_0

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + R(x)$$

avec

$$R(x) = \varepsilon(x)(x - x_0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

cela revient à dire que f peut être approximé par le polynôme de degré 1.

$$x \longmapsto P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

et l'erreur tendant vers zéro si $x \longrightarrow x_0$.

La formule de Taylor généralisé ce résultat en montrant que les fonctions n fois dérivables peuvent être approximés au voisinage de x_0 par des polynômes de degré n .

i.e.:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

$$\left(\text{ou } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \right)$$

Où le polynôme P_n est de degré n

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \\ &\quad + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

L'erreur $R_n(x)$ est appelé reste d'ordre n

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \dots \\ &= \varepsilon(x) \cdot (x - x_0)^n \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

1.1.2 Théorème de Taylor

Soient f et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions vérifiant les conditions suivantes:

- 1) $f \in C^n([a, b])$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$.
- 2) La fonction $g \in C([a, b])$ et dérivable sur $]a, b[$ et $\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$ et soit $x_0 \in [a, b]$. Alors $\forall x \in [a, b], x \neq x_0$ on a:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \quad (*) \\ &\quad + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x_0, x). \end{aligned}$$

i.e.:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x_0, x)$$

où

$$R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n g(x) g(x_0)}{n! g'(c)} \quad (**)$$

c est un point strictement compris entre x et x_0 ($c \in]x, x_0[$).

- L'expression (*) est dite formule de Taylor avec reste généralisée (**).
- Le choix de diverse fonction g vérifiant la condition (**) entraîne diverse forme du reste $R_n(x_0, x)$.

1.1.3 Formule de Taylor avec le reste de Lagrange

Théorème 1.1.1 :

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in C^n([a, b])$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$ et soit $x_0 \in [a, b]$. Alors $\forall x \in [a, b], x \neq x_0$ on a:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \\ & + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

c est strictement compris entre x et x_0 .

le terme $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ est appelé le reste de Lagrange.

Remarque 1.1.1 :

1) On utilise parfois de Taylor avec une autre évaluation de reste (reste de Cauchy)

En prenant: $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ où $0 < \theta < 1$.

On obtient:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x_0, x)$$

où

$$R_n(x_0, x) = \frac{1}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))$$

2) En prenant $h = x - x_0$ et $c = x_0 + \theta h$ on obtient:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta h).$$

1.1.4 Formule de Maclaurin

Si $x_0 = 0$ dans la formule de Taylor Lagrange on obtient la formule dite de Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad \text{où } 0 < \theta < 1.$$

1.1.5 Formule de Taylor avec le reste de Young

Théorème 1.1.2 :

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$, supposons que $f^{(n)}(x_0)$ existe et fini alors $\forall x_0 \in [a, b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$$

le reste $R_n(x_0, x) = o(x - x_0)^n$ est dite reste de Young, qui posé la propriété suivante:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x_0, x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

En posant $\varepsilon(x) = \frac{R_n(x_0, x)}{(x - x_0)^n}$ pour $x \neq x_0$ et $\varepsilon(x_0) = 0$, on obtient le reste de Young sous la forme suivante:

$$R_n(x_0, x) = (x - x_0)^n \varepsilon(x) \quad \text{où } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Si $x_0 = 0$, on obtient la formule de Maclaurin-Young

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x)$$

où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

1.2 Développements limités

1.2.1 Développements limités au voisinage de 0

Définition 1.2.1 :

Soit f une fonction définie sur le voisinage de $x = 0$, sauf peut-être en 0.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe des nombres $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction ε tel que pour tout élément x non nul d'un intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \\ &= P_n(x) + x^n\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1 :

Le polynôme $P_n(x)$ est appelé partie régulière du développement limité et $x^n\varepsilon(x)$ est reste ou partie complémentaire.

Exemple 1.2.1 :

$$f(x) = \frac{1}{1-x}; \quad x \neq 1$$

On obtient par division suivant les puissances croissantes à l'ordre n

1	1 - x
1 - x	1 + x + x ² + + x ⁿ
x	
x - x ²	
x ²	
⋮	
x - x ⁿ⁺¹	
x ⁿ⁺¹	

Alors:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

où

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad \text{et} \quad x^n\varepsilon(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Donc

$$\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0$$

Donc la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ admet un développement limité au voisinage de 0.

Proposition 1.2.1 :

Soit f une fonction admettant un développement limité au voisinage de 0.

- 1) *Si f est paire, la partie régulière $P_n(x)$ est un polynôme pair.*
- 2) *Si f est impaire, la partie régulière $P_n(x)$ est un polynôme impair.*

1.2.2 Unicité du développement limité**Théorème 1.2.1 :**

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 alors ce développement limité est unique.

1.2.3 Obtention de développement limité à l'aide de la formule de Taylor-Young**Théorème 1.2.2 :**

Si $f^{(n)}(0)$ existe alors f admet le développement limité:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$

Corollaire 1.2.1 :

Si $f^{(n)}(0)$ existe et si f admet un développement limité d'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

Alors: $f(0) = a_0; \quad \frac{f'(0)}{1!} = a_1; \quad \frac{f''(0)}{2!} = a_2; \dots; \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$

1.2.4 Développements limités des fonctions usuelles obtenir par la formule de Maclaurin

Comme nous avons déjà remarqué la formule de Maclaurin-Young admet un développement limité d'ordre n pour toute fonction f telle que $f^{(n)}(0)$ existe.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

par ce procédé on obtient les développements limités des fonctions usuelles au voisinage de 0.

Exemple 1.2.2 :

1) $f(x) = \sin x \implies f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

• Si n paire $\implies n = 2p \implies f^{(2p)}(0) = 0$

• Si n impaire $\implies n = 2p + 1 \implies f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p$

Alors:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

2) $f(x) = \cos x \implies f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

• Si n paire $\implies n = 2p \implies f^{(2p)}(0) = (-1)^p$

• Si n impaire $\implies n = 2p + 1 \implies f^{(2p+1)}(0) = 0$

Alors:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

3) $f(x) = e^x \implies f^{(n)}(x) = e^x \implies f^{(n)}(0) = 1$

Alors:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

4) $f(x) = (1+x)^\alpha; \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$f^{(p)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)(1+x)^{\alpha-p} \quad \text{à condition que } (1+x) > 0.$$

pour $x > -1$ on a:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}; \quad f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + (-1)^{n-1} \times \frac{1 \times 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2^n n!} x^n + o(x^n).$$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots + (-1)^n \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} x^n + o(x^n).$$

1.2.5 Opérations sur les développements limités

Développements limités obtenus par restriction

Si la fonction f admet un développement limité au voisinage de 0 jusqu'à l'ordre n , alors elle admet un développement limité d'ordre $k \leq n$.

En effet:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n) \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} + \dots + a_nx^n + o(x^n) \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + o(x^k) \end{aligned}$$

donc

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + x^k\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Opérations algébriques sur les développements limités

Théorème 1.2.3 :

Soit f et g deux fonctions admettant des développements limités ont même ordre n au voisinage de 0.

Alors les fonctions $f + g$ et $f \times g$ admettent des développements limités d'ordre n au voisinage de 0. et il de même pour $\frac{f}{g}$ si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$.

En autres si $f(x) = p_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = q_n(x) + o(x^n)$

a) **Somme:**

$$(f + g)(x) = (p_n(x) + q_n(x)) + o(x^n).$$

b) **Produit:**

$$(f \times g)(x) = C_n(x) + o(x^n).$$

la partie régulière $C_n(x)$ du produit de f par g s'obtient en se conservent dans le produit des parties régulières $p_n(x)$ et $q_n(x)$ que les termes de degré inférieur ou égal à n .

c) **Quotient:**

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = D_n(x) + o(x^n).$$

la partie régulière du développement limité de $\frac{f}{g}$ est le quotient à l'ordre n dans la division suivante les puissances croissantes de la partie régulière de f sur la partie régulière de g .

Exemple 1.2.3 :

•) On a le développement limité de e^x est:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \end{aligned}$$

Alors on peut calculer le développement limité des fonctions $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) + o(x^n) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

•) $a^x = e^{x \ln a} = e^{x \ln a}$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + o((x \ln a)^n)$$

•) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \cos 0 = 1 \neq 0.$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)} \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7). \end{aligned}$$

•) $f(x) = \frac{\sin x}{1-x} = \sin x \left(\frac{1}{1-x} \right); \quad n = 3.$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} \right) (1 + x + x^2 + x^3) + o(x^3) \\ &= x + x^2 + x^3 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

•) $f(x) = x \cdot \cot g x = x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}; \quad n = 4.$

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= x \cdot \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} \\ &= \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)} \\ &= 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o(x^4). \end{aligned}$$

Développement limité d'une fonction composée

Proposition 1.2.2 :

Soient f et g deux fonctions admet au voisinage de 0 des développements limités d'ordre n de partie $p_n(x)$ et $q_n(x)$.

i.e. $f(x) = p_n(x) + x^n \varepsilon_1(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$

$g(x) = q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$

si $g(0) = 0$ alors la fonction composée $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (p_n \circ q_n)(x) + x^n \varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

et on ne conservant que les puissances où dans $(p_n \circ q_n)(x)$ ne garder que les termes de degré $\leq n$.

Autrement dit:

Si

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x)$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x)$$

Alors

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= a_0 + a_1(g(x)) + a_2(g(x))^2 + \dots + a_n(g(x))^n + g(x)^n\varepsilon_1(g(x)) \\ &= a'_0 + a'_1x + a'_2x^2 + \dots + a'_nx^n + x^n\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Exemple 1.2.4 : $f(x) = e^{\cos x}$; $n = 5$; $V(0)$

$$f(x) = e^{\cos x} = e^{\cos x - 1 + 1} = ee^{\cos x - 1}$$

On pose $g(x) = e^x$; $h(x) = \cos x - 1$

On a: $h(0) = 0$

$$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\begin{aligned}h(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - 1 + o(x^5) \\ &= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ h)(x) &= e^{\cos x - 1} \\ &= 1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^3}{3!} \\ &\quad + \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^4}{4!} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^5}{5!} + o\left(\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^5\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{2!4} + o(x^5) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o(x^5) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^5)\end{aligned}$$

Alors

$$f(x) = ee^{\cos x - 1} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^5)\right) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^5).$$

1.2.6 L'intégration d'un développement limité

Théorème 1.2.4 :

Soit $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n c'est-à-dire:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

Alors la fonction $F(x) = \int_0^x f(t) dt$; $x \in [-a, a]$ admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre $(n+1)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\tau(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = 0 \\ &= \int_0^x p_n(t) dt + x^{n+1}\tau(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = 0. \end{aligned}$$

1.2.7 Dérivation d'un développement limité

Théorème 1.2.5 :

Si la fonction f est dérivable sur $[-a, a]$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et si sa dérivée f' admet un développement limité d'ordre $(n-1)$ au $V(0)$ alors la partie régulière du développement limité est la dérivée de la partie régulière du développement limité de f .

Exemple 1.2.5 : $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$

par dérivation on obtient le développement limité la fonction:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + o(x^{n-1})$$

En faisant le changement x par $-x$ dans le développement limité de $\frac{1}{1-x}$ on obtient:

$$\left(\frac{1}{1+x} \right) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

par intégration on trouve le développement limité de $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

Le changement de x par $-x$ dans le développement limité de $\ln(1+x)$ on obtient le développement limité de $\ln(1-x)$.

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \dots - \frac{1}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

et donc obtient $\arg th x$

$$\begin{aligned} \arg th x &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1} + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{1}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}) \right) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \quad \text{où } -1 < x < 1. \end{aligned}$$

1.2.8 Développement limité au voisinage d'un point x_0

Définition 1.2.2 :

On dit qu'une fonction f définie au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0 , admet un développement limité d'ordre n si la fonction $F : y \longrightarrow F(y) = f(y+x_0)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Alors

$$F(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots + a_ny^n + o(y^n)$$

$$\implies f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

i. e. On se ramener du $V(x_0)$ au $V(0)$ par le changement de variable:

$$\begin{pmatrix} y = x - x_0 \\ V(0) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x = y + x_0 \\ V(x_0) \end{pmatrix}$$

Exemple 1.2.6 :

Calculer le développement limité de e^x au $V(1)$

$$\begin{pmatrix} y = x - 1 \\ V(0) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x = y + 1 \\ V(1) \end{pmatrix}$$

$$e^x = e^{y+1} = e \cdot e^y, \quad y \longrightarrow 0 \quad \text{donc}$$

$$\begin{aligned} e^x &= e \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots + \frac{y^n}{n!} + o(y^n) \right) \\ &= e \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} + o((x-1)^n) \right). \end{aligned}$$

Remarque 1.2.2 :

De la même manière on peut considérer le développement limité de f au voisinage $\infty(V(\infty))$ qu'on ramène au $V(0)$ par le changement de variable

$$\left(y = \frac{1}{x}\right) \Longleftrightarrow \left(x = \frac{1}{y}\right)$$

$$V(0) \Longleftrightarrow V(\infty)$$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots + a_ny^n + o(y^n)$$

$$\Rightarrow f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$$

1.2.9 Développement limité généralisé

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 sauf peut être en 0. Nous supposons que f n'admet pas un développement limité au voisinage de 0 mais la fonction $x^\alpha f(x)$ (α réel positif) admet un développement limité au voisinage de 0 alors pour $\alpha \neq 0$

$$x^\alpha f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

$$\text{d'où } f(x) = \frac{1}{x^\alpha} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n))$$

cette expression est dite développement limité généralisé au voisinage de 0.

Exemple 1.2.7 :

$$f(x) = \frac{1}{x - x^2}$$

f n'admet pas un développement limité au voisinage de 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$$xf(x) = x \cdot \frac{1}{x - x^2} = \frac{1}{1 - x}$$

$$= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n).$$

le développement limité généralisé de f

$$f(x) = \frac{1}{x} (1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n))$$

$$= \frac{1}{x} + 1 + x + \dots + x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Exercice 1.2.1 :

Trouvez les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes:

$$1) f(x) = \frac{x}{\sin x} ; \quad 2) g(x) = \frac{1}{\cos x} ; \quad 3) h(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} ; \quad 4) k(x) = e^{\cos x}$$

Solution 1.2.1 :

1) Nous avons: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$

donc

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)}$$

posons $u = -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}$

nous avons d'autre part:

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(x^2)$$

pour u au voisinage de 0 donc:

$$\begin{aligned} (x) \quad \frac{x}{\sin x} &= 1 - \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right) + \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4). \end{aligned}$$

2) On a: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

effectuons la division suivant les puissances croissantes de 1 par $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ nous obtenons:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ -1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} & \hline \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} & 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} \\ \frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{24} & \\ -\frac{x^4}{2} + \frac{4x^4}{24} - \frac{x^6}{48} & \\ \hline & \frac{5x^4}{24} - \frac{x^6}{48} \end{array}$$

donc

$$g(x) = \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

3) On a:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

effectuons le produit de ces deux développements limités:

$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} - \frac{25x^4}{12} + o(x^4)$$

4) On a:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\text{posons } u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$e^{\cos x} = e^{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} = e^{1+u} = e \cdot e^u$$

$$\begin{aligned} e^u &= 1 + u + \frac{u^2}{2!} + o(u^2) \\ &= 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2}{2!} + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \end{aligned}$$

alors

$$k(x) = e^{\cos x} = e \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right) = e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^4}{6} + o(x^4)$$