المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف ميلة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى ماستر : اقتصاد نقدي و مالي

المحاضرة الثالثة : الانحدار الخطي المتعدد (THE MULTIPLE LINEAR MODEL)

من إعداد الأستاذ : لفيلف عبد الحق

أستاذ بالمركز الجامعي ميلة

دكتوراه في العلوم المالية والمصرفية

السنة الجامعية 2023 – 2024

مقدمة

يوضح الانحدار الخطي المتعدد العلاقة بين متغير تابع ومجموعة من المتغيرات المستقلة، هذا ما يعني أن أي تغير في المتغيرات المستقلة يتبعها تغير في المتغير التابع. وتشير خطية العلاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع إلى أن أثر المتغير المستقل على المتغير التابع لا يختلف عن أثر متغير أخر، فيفترض أن جميع الأفراد يتصرفون بنفس الطريقة، أو أن تفضيلات الأفراد متماثلة. ونظرا لأن هذا الافتراض لا يمثل الحقيقة فإن استخدام الانحدار الخطي المتعدد ينطوي على وجود نوع من الخطأ في التقدير، ولذا فإننا ندخل في علاقة الانحدار حدا يعرف بالحد العشوائي ε_t .

أولا: تقديم النموذج

1- شكل النموذج:

تأخذ علاقة الانحدار الخطي المتعدد الشكل التالي: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$

ويمكن كتابته على الشكل المصفوفاتي التالي:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \cdots + \beta_k X_{k1} + \varepsilon_1 \\
Y_2 &= \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \cdots + \beta_k X_{k2} + \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
Y_n &= \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \cdots + \beta_k X_{kn} + \varepsilon_b
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$Y = X \beta + \varepsilon$$

حيث: Y : شعاع مشاهدات المتغير التابع $(n \times 1)$.

X : مصفوفة مشاهدات المتغيرات المستقلة $(n \times k)$.

β: شعاع المعلمات $(k \times 1)$.

ε: شعاع المتغير العشوائي $(n \times 1)$.

2- فرضيات النموذج:

إن الطريقة المستعملة في تقدير معاملات نموذج الانحدار الخطي المتعدد هي طريقة المربعات الصغرى العادية "OLS"، ولهذا فإن هذه الفرضيات تتعلق بهذه الطريقة وكلها تدور حول طبيعة وشكل المتغير العشوائي، وهي:

- $E(\varepsilon)=0$: متوسط قيم المتغير العشوائي معدوم، وهو ما يمكن التعبير عنه كمايلي:

$$E(\varepsilon)=0=\begin{pmatrix}E(\varepsilon_1)\\E(\varepsilon_2)\\\vdots\\\vdots\\E(\varepsilon_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

- $E(\varepsilon\varepsilon')=\delta_\varepsilon^2 I_n$ ، أي تباين المتغير العشوائي ثابت، وأن التباينات المشتركة بين قيمه معدومة. أي:

$$V(\varepsilon_i)=E(\varepsilon_i^2)=\delta_\varepsilon^2 \qquad \forall i=1.....n$$
$$Cov(\varepsilon_i.\varepsilon_j)=E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0 \quad \forall i\neq j$$

هذه الفرضية يمكن التعبير عنها من خلال مصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء، والتي تكون كما يلي:

$$\Omega_\varepsilon=E(\varepsilon\varepsilon')=E\left(\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\vdots\\\vdots\\\varepsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 \cdots \cdots & \varepsilon_n\end{pmatrix}\right)=E\begin{pmatrix}\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \cdots & \cdots & \varepsilon_1\varepsilon_n\\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \cdots & \varepsilon_2\varepsilon_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ \varepsilon_1\varepsilon_n & \varepsilon_2\varepsilon_n & \cdots & \cdots & \varepsilon_n^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n)\\ E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & E(\varepsilon_2^2) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_2\varepsilon_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ E(\varepsilon_1\varepsilon_n) & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) & \cdots & \cdots & E(\varepsilon_n^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \delta_\varepsilon^2 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \delta_\varepsilon^2\end{pmatrix}$$

$$=\delta_\varepsilon^2\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix}=\delta_\varepsilon^2 I_n$$

- $\varepsilon\to N(0\,.\,\delta^2 I_n)$: أي أن الأخطاء تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط معدوم وتباين يساوي $\delta^2 I_n$ ، أي:

$$\varepsilon\to N\left[\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix} \;.\; \delta_\varepsilon^2\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix}\right]$$

- $Cov(X.\varepsilon)=0$: عدم وجود ارتباط بين أشعة مصفوفة المتغيرات المستقلة وشعاع الخطأ العشوائي.
- $\left(\dfrac{X'X}{n}\right)$: تؤول إلى مصفوفة منتهية وغير أحادية.
- أشعة المصفوفة X مستقلة، هذا ما يسمح بالتخلص من مشكل الامتداد الخطي وحساب $(X'X)^{-1}$.

ثانيا: تقدير النموذج الخطي المتعدد

يتم تقدير النموذج الخطي المتعدد بطريقة المربعات الصغرى العادية، التي تهدف إلى الحصول على مقدرات $\hat{\beta}_1 , \hat{\beta}_2 \cdots \hat{\beta}_k$ تعطي مجموع مربعات انحراف القيم المقدرة عن القيم الحقيقية في أدنى قيمة له.

ليكن النموذج: $Y = X\beta + \varepsilon$ ، وتحت فرضيات طريقة المربعات الصغرى العادية نجد:

- النموذج المقدر: $\hat{Y} = X\hat{\beta}$.
- انحراف القيم المقدرة عن القيم الحقيقية: $e = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$.
- مجموع مربعات البواقي: $e'e = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$.

وكما هو معلوم أن طريقة المربعات الصغرى العادية تهدف إلى جعل $e'e$ في أدنى قيمة لها، أي إيجاد $\text{Min } e'e$ ، فنقوم بحساب المشتقات الجزئية لـ: $e'e$ بالنسبة إلى $\hat{\beta}_1 , \hat{\beta}_2 \cdots \hat{\beta}_k$ ، ونجعلها مساوية للصفر.

لدينا: $e'e = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = Y'Y - Y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$.

ولدينا القيمتين: $Y'X\hat{\beta}$ و $\hat{\beta}'X'Y$ متساويتين فنجد: $e'e = Y'Y - 2\hat{\beta}X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$.

نقوم بإيجاد: $\frac{\partial e'e}{\partial \hat{\beta}} = 0$.

$$\frac{d\,e'e}{d\hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$
$$= -X'Y + X'X\hat{\beta} = 0$$

ومنه: $$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

ملاحظة: $X'Y - X'X\hat{\beta} = 0 \quad \Rightarrow X'(Y - X\hat{\beta}) = X'e = 0$ ، ومنه فإن: X و e متعامدة.

$$e = (Y - X\hat{\beta}) = Y - X(X'X)^{-1}X'Y = (I - X(X'X)^{-1}X')Y = MY$$

حيث: M مصفوفة متناظرة ومستقلة، أي: $M = M^2 = M^3 = \cdots$ و $MX = 0$.

فمن النموذج الذي يأخذ شكل مصفوفات نجد أن الشعاع المقدر $\hat{\beta}$ يكون كما يلي:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & \cdots & \sum X_{kt} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \cdots & \sum X_{2t}X_{kt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{kt} & \sum X_{2t}X_{kt} & \cdots & \sum X_{kt}^2 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \cdots & X_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \vdots \\ \sum X_{kt}Y_t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} n & \sum X_{2t} & \cdots & \sum X_{kt} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \cdots & \sum X_{2t}X_{kt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{kt} & \sum X_{2t}X_{kt} & \cdots & \sum X_{kt}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \vdots \\ \sum X_{kt}Y_t \end{pmatrix}$$

مثال: لتكن لديك البيانات التالية:

t	Y_t	X_{2t}	X_{3t}
1	4	4	0.9
2	4.5	5	0.8
3	5	6	0.9
4	5.5	7	0.8
5	6	9	0.7
6	7	8	0.6
7	6.5	10	0.6
8	6.5	11	0.8
9	7.5	12	0.5
10	7.5	13	0.5
$\sum$	**60**	**85**	**7.1**

المطلوب: قدر النموذج التالي $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t$ بطريقة OLS. ثم استنتج القيم المقدرة وبواقي التقدير.

لدينا:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} \\ 1 & X_{22} & X_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{210} & X_{310} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{10} \end{pmatrix}$$

$$Y_{(10\times1)} = X_{(10\times3)} \quad \beta_{(3\times1)} + \varepsilon_{(10\times1)}$$

وبالتالي نجد:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} 10 & \sum X_{2t} & \sum X_{3t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}X_{3t} \\ \sum X_{3t} & \sum X_{2t}X_{3t} & \sum X_{3t}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \sum X_{kt}Y_t \end{pmatrix}$$

حيث:

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 10 & \sum X_{2t} & \sum X_{3t} \\ \sum X_{2t} & \sum X_{2t}^2 & \sum X_{2t}X_{3t} \\ \sum X_{3t} & \sum X_{2t}X_{3t} & \sum X_{3t}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 85 & 7.1 \\ 85 & 805 & 57 \\ 7.1 & 57 & 5.25 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(X'X) = (-1)^{1+1}(10)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 805 & 57 \\ 57 & 5.25 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}(85)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 85 & 57 \\ 7.1 & 5.25 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}(7.1)\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 85 & 805 \\ 7.1 & 57 \end{pmatrix}$$

$$= 10[805 \cdot 5.25 - 57 \cdot 57] - 85[85 \cdot 5.25 - 57 \cdot 7.1] + 7.1[85 \cdot 57 - 805 \cdot 7.1] = 60.2$$

$$\Rightarrow (X'X)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(X'X)}\mathrm{Adj}(X'X) = \frac{1}{60.2}\begin{pmatrix} +977.25 & -41.55 & +(-870.5) \\ -41.55 & +2.09 & -(-33.5) \\ +(-870.5) & -(-33.5) & +825 \end{pmatrix}^{/}$$

$$= \begin{pmatrix} 16.23 & -0.690 & -14.46 \\ -0.690 & 0.034 & 0.556 \\ -14.46 & 0.556 & 13.70 \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_{2t}Y_t \\ \sum X_{kt}Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 541 \\ 41.1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} 16.23 & -0.690 & -14.46 \\ -0.690 & 0.034 & 0.556 \\ -14.46 & 0.556 & 13.70 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 541 \\ 41.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.29 \\ 0.24 \\ -3.30 \end{pmatrix}$$

ومنه يكون النموذج المقدر كما يلي:

$$\hat{Y}_t = 6.29 + 0.24 \cdot X_{2t} - 3.30 \cdot X_{3t}$$

أما القيم المقدرة $\hat{Y}$ وبواقي التقدير e فتكون كمايلي:

$$\hat{Y}_1 = 6.29 + 0.24 \cdot (X_{21} = 4) - 3.30 \cdot (X_{31} = 0.9) = 4.28 \Rightarrow e_1 = Y_1 - \hat{Y}_1 = 4 - 4.28 = -0.28$$

$$\hat{Y}_2 = 6.29 + 0.24 \cdot (X_{22} = 5) - 3.30 \cdot (X_{32} = 0.8) = 4.85 \Rightarrow e_2 = Y_2 - \hat{Y}_2 = 4.5 - 4.85 = -0.35$$

M M M M M M M M M

$$\hat{Y}_{10} = 6.29 + 0.24 \cdot (X_{210} = 13) - 3.30 \cdot (X_{310} = 0.5) = 7.78 \Rightarrow e_{10} = Y_{10} - \hat{Y}_{10} = 7.5 - 7.78 = -0.28$$

وهو ما يوضحه الجدول التالي:

	$\hat{Y}$	e
	4.28	-0.2850
	4.85	-0.3571
	4.76	0.2318
	5.34	0.1598
	6.15	-0.1538
	6.24	0.7571
	6.72	-0.2259
	6.30	0.19369
	7.53	-0.03953
	7.78	-0.2810
$\sum$	**60**	**00**

ثالثا: خصائص مقدرات OLS

تعتبر خاصية خطية المقدرات أولى خصائص مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية، فقد بينا سابقا أن:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

نرمز بـ: A للمصفوفة $(X'X)^{-1}X'$ ، وهي مصفوفة ذات البعد $(k \times n)$. وبالتالي نجد أن: $\hat{\beta} = AY$

حيث:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

وبالتالي نجد:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 = a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \cdots \cdots + a_{1n}Y_n = \sum a_{1i}Y_i \\ \hat{\beta}_2 = a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \cdots \cdots + a_{2n}Y_n = \sum a_{2i}Y_i \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \hat{\beta}_k = a_{k1}Y_1 + a_{k2}Y_2 + \cdots \cdots + a_{kn}Y_n = \sum a_{ki}Y_i \end{pmatrix}$$

أي أن مقدر كل معلمة من معلمات النموذج الخطي المتعدد هو على شكل خطي مع قيم المتغير التابع. أما باقي الخصائص فيمكن تبيانها كما يلي:

1- خاصية عدم التحيز (Unbiased):

$$E(\hat{\beta}) = E\left[(X'X)^{-1}X'Y\right] = E\left[(X'X)^{-1}X'(X\beta+\varepsilon)\right] = E\left[(X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon\right]$$
$$= E\left[\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon\right] = \beta + X'X)^{-1}X'E(\varepsilon) = \beta$$

ومنه: $\hat{\beta}$ مقدر غير متحيز لـ: β

2- أفضل مقدرات خطية غير متحيزة Best Linear Unbiased Estimators 'BLUE' :

حسب نظرية Gauss-Markov والتي تشير إلى أنه من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة، فإن مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية هي أفضل مقدرات خطية غير متحيزة، حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة بباقي المقدرات الخطية وغير المتحيزة الأخرى.

ولإثبات ما جاءت به هذه النظرية نقوم أولا بإيجاد تباين مقدرات النموذج.

$$\Omega_{\hat{\beta}} = V(\hat{\beta}) = E\left[(\hat{\beta}-E(\hat{\beta}))(\hat{\beta}-E(\hat{\beta}))'\right] = E\left[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\right] = E\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}\right]$$
$$= (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1} = \Omega_{\varepsilon}(X'X)^{-1} = \delta_{\varepsilon}^{2}I_{n}(X'X)^{-1} = \delta_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1}$$

بعد حساب تباين المقدرات سنعمل على اثبات خاصية أقل تباين كمايلي:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \frac{\delta_{\varepsilon}^{2}}{n}\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\Omega_{\hat{\beta}} = 0$$

3- خاصية الاتساق (Consistent):

نقول عن مقدر $\hat{\theta}$ بأنه مقدر متسق (Consistent Estimator)، إذا حقق الشرطين التاليين:

$$i/\quad E(\hat{\theta}) = \theta \qquad\qquad ii/\quad \lim_{n\to+\infty} V(\hat{\theta}) = 0$$

مما سبق نجد أن:

المقدر $\hat{\beta}$ يحقق الشرطين:

$$i/\quad E(\hat{\beta}) = \beta \qquad\qquad ii/\quad \lim_{n\to+\infty} V(\hat{\beta}) = 0$$

إذن نستنتج أن المقدر $\hat{\beta}$ هو مقدر متسق لشعاع المعلمات β

4- تقدير تباين المتغير العشوائي ε_t :

لدينا:

$$e = MY = M(X\beta+\varepsilon) = MX\beta + M\varepsilon = M\varepsilon$$

ولدينا:

$$e'e=(M\varepsilon)'(M\varepsilon)=\varepsilon' M'M\varepsilon=\varepsilon' M\varepsilon$$

نقوم بحساب الأمل الرياضي لـ: $e'e$ فنجد:

$$\begin{aligned}E(e'e)=E(\varepsilon' M\varepsilon)=E(trac(\varepsilon M\varepsilon'))=E(tracM\varepsilon\varepsilon')=tracME(\varepsilon\varepsilon')\\ =tracM(\delta_\varepsilon^2 I)=\delta_\varepsilon^2 tracM\\ =\delta_\varepsilon^2\left[tracI_n-trac\left[X(X'X)^{-1}X'\right]\right]\\ =\delta_\varepsilon^2[n-k]\end{aligned}$$

من خلال هذه النتيجة نستنتج أن $e'e$ مقدر متحيز لـ: δ_ε^2. إذن المقدر غير المتحيز لـ: δ_ε^2 هو: $\hat{\delta}_\varepsilon^2={e'e}/{n-k}$

وبالتالي يصبح التباين المقدر لـ: $\hat{\beta}$ كمايلي:

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}}=\hat{\delta}_\varepsilon^2(X'X)^{-1}$$

<u>مثال:</u> من المثال السابق يمكن تقدير تباين الخطأ العشوائي كما يلي:

$$\hat{\delta}_\varepsilon^2=\frac{e'e}{n-k}=\frac{\begin{pmatrix}-0.28 & -0.35 & \text{L} & -0.28\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.28\\ -0.35\\ \text{M}\\ -0.28\end{pmatrix}}{10-3}=\frac{1.05}{7}=0.1505$$

أما مصفوفة التباين والتباين المشترك المقدر لشعاع المقدرات فيكون كما يلي:

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}}=\hat{\delta}_\varepsilon^2(X'X)^{-1}=0.1505\begin{pmatrix}16.23 & -0.690 & -14.46\\ -0.690 & 0.034 & 0.556\\ -14.46 & 0.556 & 13.70\end{pmatrix}$$

$$\hat{\delta}_{\beta_1}^2=0.1505(16.23)=2.44\Rightarrow\hat{\delta}_{\hat{\beta}_1}=\sqrt{2.44}=1.56$$

$$\hat{\delta}_{\beta_2}^2=0.1505(0.034)=0.005\Rightarrow\hat{\delta}_{\hat{\beta}_2}=\sqrt{0.005}=0.07$$

$$\hat{\delta}_{\beta_3}^2=0.1505(13.70)=2.06\Rightarrow\hat{\delta}_{\hat{\beta}_3}=\sqrt{2.44}=1.43$$

5- بناء مجالات ثقة لمعلمات النموذج:

بعد تحديد ومعرفة خصائص الشعاع $\hat{\beta}$، سنعمل على بناء مجالات ثقة تنتمي إليها معلمات النموذج، وهذا عند مستوى معنوية معين، حيث احتمال أن تنتمي معلمة النموذج إلى مجال الثقة يساوي $1-\alpha$

نعلم أن:

$$\hat{\beta}\rightarrow N\left(\beta.\delta_\varepsilon^2(X'X)^{-1}\right)$$
$$\hat{\beta}_i\rightarrow N\left(\beta_i.\delta_\varepsilon^2 a_{ii}\right)$$

فإنه حسب نظرية النهايات المركزية:

$$\frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\sqrt{\delta_\varepsilon^2 a_{ii}}} \to N(0\,.\,1)$$

بالمقابل نعلم أن تباين المتغير العشوائي مجهول، حيث يتم تقديره بالعلاقة: $\hat{\delta}_\varepsilon^2=\frac{e'e}{n-k}$.

وبما أن: $(n-k)\cdot\frac{\hat{\delta}_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2}\to\chi_{n-k}^2$

وبالتالي يتم الانتقال من التوزيع الطبيعي إلى توزيع STUDENT كما يلي:

$$\frac{N(0.1)}{\sqrt{\chi_{n-k}^2/n-k}}\to St\ (n-k)$$

بالعودة إلى المقدرات $\hat{\beta}_i$ نجد:

$$\frac{\frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\sqrt{\delta_\varepsilon^2 a_{ii}}}}{\sqrt{\frac{(n-k)\cdot\frac{\hat{\delta}_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2}}{(n-k)}}}=\frac{\frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\sqrt{\delta_\varepsilon^2 a_{ii}}}}{\sqrt{\frac{\hat{\delta}_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2}}}=\frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\sqrt{\delta_\varepsilon^2 a_{ii}}}\cdot\sqrt{\frac{\delta_\varepsilon^2}{\hat{\delta}_\varepsilon^2}}=\frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\sqrt{\hat{\delta}_\varepsilon^2 a_{ii}}}=\frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2}}\to St(n-k)$$

بعد ايجاد التوزيع الاحتمالي للمقدرات $\hat{\beta}_i$ يمكننا بناء مجالات ثقة تنتمي إليها معلمات النموذج، وهذا عند مستوى معنوية α كمايلي:

$$P\left(-St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\ \le\ \frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2}}\ \le\ St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2}\ \le\ \hat{\beta}_i-\beta_i\ \le\ St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\hat{\beta}_i-St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2}\ \le\ \beta_i\ \le\ \hat{\beta}_i+St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\beta_i\in\left[\hat{\beta}_i-St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2}\ \ .\ \ \hat{\beta}_i+St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2}\right]\right)=1-\alpha$$

<u>مثال:</u> من المثال السابق يمكن بناء مجالات ثقة لمعلمات النموذج كمايلي:

β_i	$\hat{\beta}_i$	$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}$	$St_{(n-k)}^{\frac{\alpha}{2}}$	$\hat{\beta}_i-St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}^2$	$\hat{\beta}_i+St_{n-k}^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat{\delta}_{\hat{\beta}_i}$
β_1	$\hat{\beta}_1=6.29$	$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_1}=1.56$	$St_{(10-3)}^{2.5\%}=2.365$	$6.29-2.365\cdot(1.56)$	$6.29+2.365\cdot(1.56)$
β_2	$\hat{\beta}_2=0.24$	$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_2}=0.07$		$0.24-2.365\cdot(0.07)$	$0.24+2.365\cdot(0.07)$
β_3	$\hat{\beta}_3=-3.30$	$\hat{\delta}_{\hat{\beta}_3}=1.43$		$-3.30-2.365\cdot(1.43)$	$-3.30+2.365\cdot(1.43)$

وبالتالي نجد:

$$\beta_1\in[2.60\ \ .\ \ 9.97]$$
$$\beta_2\in[0.07\ \ .\ \ 0.40]$$
$$\beta_3\in[-6.68\ \ .\ \ 0.08]$$

رابعا: تقييم النموذج الخطي المتعدد

يتم تقييم نموذج الانحدار الخطي المتعدد باستعمال المعايير الثلاثة السابقة:

1- المعايير الاقتصادية:

تتعلق بحجم وإشارة المعلمات المقدرة، لأن النظرية الاقتصادية تضع قيودا مسبقة على حجم وإشارة المعلمات، فإذا ما جاءت هذه المعلمات على عكس ما تقرره النظرية مسبقا فإن هذا يمكن أن يكون مبررا كافيا لرفض هذه المعلمات.

2- المعايير الإحصائية:

تتمثل هذه المعايير فيما يلي:

2-1- تحليل التباين ومعامل التحديد:

كما رأينا في حالة النموذج الخطي البسيط، فإنه يمكن استنتاج معادلة تحليل التباين في حالة النموذج الخطي المتعدد كمايلي:

$$\begin{aligned}(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y}) &= (Y-\hat{Y}+\hat{Y}-\overline{Y})'(Y-\hat{Y}+\hat{Y}-\overline{Y}) = \left((Y-\hat{Y})'+(\hat{Y}-\overline{Y})'\right)\left((Y-\hat{Y})+(\hat{Y}-\overline{Y})\right)\\ &= (Y-\hat{Y})'(Y-\hat{Y})+(Y-\hat{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})+(\hat{Y}-\overline{Y})'(Y-\hat{Y})+(\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})\\ &= (\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})+(Y-\hat{Y})'(Y-\hat{Y})+2\cdot\left[(Y-\hat{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})=0=\right]\\ &= (\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})+(e)'(e) = (\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})+e'e\end{aligned}$$

وبالتالي يمكن صياغة معادلة تحليل التباين على الشكل التالي:

$$\begin{array}{ccccc}(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y}) & = & (\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y}) & + & e'e\\ TSS & = & ESS & + & RSS\\ \sum(Y_t-\overline{Y})^2 & = & \sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2 & + & \sum e_t^2\end{array}$$

حيث:

$\sum(Y_t-\overline{Y})^2=(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y})$: مجموع مربعات الانحرافات الكلية ((Total Sum of Squares (TSS)).

$\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2=(\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})$: مجموع مربعات الانحرافات المفسرة ((Explained Sum of Squares (ESS)).

$\sum e_t^2=e'e$: مجموع مربعات البواقي ((Residual Sum of Squares (RSS))

أما جدول تحليل التباين (Analysis Of Variance (ANOVA فيأخذ الشكل التالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات

المتغيرات المستقلة	$ESS=\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2$	k	$\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2/k$
البواقـــي e_t	$RSS=\sum e_t^2$	$n-k$	$\sum e_t^2/n-k$
المجــــموع	$TSS=\sum(Y_t-\overline{Y})^2$	$n-1$	

في حالة النموذج الخطي المتعدد يمكن قياس القدرة التفسيرية للنموذج وجودة توفيقه من خلال معامل التحديد المتعدد R^2 ، حيث يشير هذا المعامل إلى النسبة التي يمكن تفسيرها من التغير الكلي في المتغير التابع بدلالة المتغيرات التفسيرية المدرجة في نموذج الانحدار المتعدد، ويمكن حسابه انطلاقا من معادلة تحليل التباين التي تعطى بالشكل التالي:

$$R^2=\frac{(\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})}{(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y})}=\frac{\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2}{\sum(Y_t-\overline{Y})^2}$$
$$=\frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}-\overline{Y}^2}{\sum(Y_t-\overline{Y})^2}$$
$$=1-\frac{(e-\overline{e})'(e-\overline{e})}{(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y})}=1-\frac{\sum e_{t2}}{\sum(Y_t-\overline{Y})^2}$$

يتأثر معامل التحديد بعدد المتغيرات المستقلة، ولهذا يمكن أن نصحح قيمة معامل التحديد عن طريق أخذ درجات الحرية في الحسبان عند حسابه، حيث أن درجة الحرية $(n-k)$ تقل مع زيادة عدد المتغيرات التفسيرية وثبات حجم العينة.

وتصبح قيمة معامل التحديد المعدل $\overline{R}^2$ كما يلي: $\overline{R}^2=1-\frac{n-1}{n-k}(1-R^2)$

تتراوح قيمة معامل التحديد بين الصفر والواحد، فإذا كان يساوي الواحد فهذا يعني أن القدرة التفسيرية جيدة، وأن جودة التوفيق عند حدها الأقصى، أما إذا كان يساوي الصفر فهذا يعني أن القدرة التفسيرية للنموذج منعدمة، وأن جودة التوفيق عند حدها الأدنى.

<u>مثال:</u> من المثال السابق نجد أن معامل التحديد يساوي:

$$R^2=\frac{(\hat{Y}-\overline{Y})'(\hat{Y}-\overline{Y})}{(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y})}=\frac{\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2}{\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2}=\frac{12.44}{13.5}=0.9219$$

أو:

$$R^2=1-\frac{e'e}{(Y-\overline{Y})'(Y-\overline{Y})}=1-\frac{\sum e_t^2}{\sum(\hat{Y}_t-\overline{Y})^2}=1-\frac{1.05}{13.5}=0.9219$$

أما معامل التحديد المصحح فيساوي:

$$\overline{R}^2=1-\frac{n-1}{n-k}(1-R^2)=1-\frac{10-1}{10-3}(1-0.9219)=0.8995$$

$R^2=0.9219$ ، أي أن للنموذج قدرة تفسيرية عالية، كما أن 92.19% من تغيرات المتغير التابع مفسرة بتغيرات المتغيرات المستقلة المدرجة بالنموذج، بينما 07.81% المتبقية فهي مفسرة بعوامل أخرى.

أما جدول تحليل التباين فيأخذ الشكل التالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
المتغيرات المستقلة	$ESS=12.44$	3	$12.44/3=4.14$
البواقــي e_t	$RSS=1.05$	$10-3=7$	$1.05/7=0.15$
المجــــموع	$TSS=13.5$	$10-1=9$	

2-2- اختبارات المعنوية:

تتمثل هذه الاختبارات فيما يلي:

2-2-1- اختبار STUDENT: يستعمل هذا الاختبار لدراسة المعنوية الجزئية لمعلمات النموذج عند مستوى معنوية معين، فإذا كان لدينا النموذج: $Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+\cdots+\beta_kX_{kt}+\varepsilon_t$، وكانت $\hat{\beta}_1$. $\hat{\beta}_2 \cdots \hat{\beta}_k$ المعلمات المقدرة للنموذج.

لاختبار العلاقة الموجودة بين المتغير التابع Y_t والمتغير المستقل X_{it} (معنوية كل معلمة على حدى)، نقوم بإجراء الاختبار التالي:

$$\begin{cases} H_0:\beta_i=0 \\ H_1:\beta_i\neq 0 \end{cases}$$

مما سبق لدينا:

$$\frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\beta}_i}}}\rightarrow St(n-k)$$

تحت ظل الفرضية $H_0:\beta_i=0$ نجد أن $\frac{\hat{\beta}_i-0}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\beta}_i}}}$ تتبع أيضا توزيع STUDENT بدرجة حرية تساوي $(n-k)$، حيث يقوم هذا الاختبار على مقارنة إحصائيةSTUDENT المحسوبة $St_{cal}=\left|\frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{\beta}_i}}}\right|$ مع الإحصائية المجدولة من جدول STUDENT عند درجة حرية $(n-k)$ ومستوى معنوية $\alpha/2$، أي $St_{tab}=St^{\alpha/2}_{n-k}$. (في حالة $(n-k)>30$ فإن $St_{tab}=1.96$).

أما قرار الاختبار فيكون كما يلي:

- نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $St_{cal}\geq St_{tab}$، و منه $\beta_i\neq 0$، وبالتالي وجود علاقة ذات دلالة احصائية بين المتغير التابع Y_t والمتغير المستقل X_{it}.
- نقبل الفرضية H_0 إذا كانت $St_{cal}<St_{tab}$، و منه $\beta_i=0$، وبالتالي عدم وجود علاقة ذات دلالة احصائية بين المتغير التابع Y_t والمتغير المستقل X_{it}.

2-2-2- اختبار FISHER : يوضح لنا هذا الاختبار المعنوية الكلية للنموذج بصورة عامة، و يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \\ H_1 : \exists\, \beta_i \neq 0 \end{cases}$$

نقوم بحساب إحصائيةFISHER التي تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{R^2 / k-1}{(1-R^2) / n-k}$$

الإحصائية F_{cal} تتبع توزيع FISHER بدرجة حرية $v_1 = k-1$ و $v_2 = n-k$ ، أي $F_{tab} = F_{(k-1.n-k)}^{\alpha=5\%}$.

ويكون قرار الاختبار كمايلي:

- نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $F_{cal} \geq F_{(k-1.n-k)}^{\alpha=5\%}$ ، ومنه: $\exists\beta_i \neq 0$ ، وبالتالي فالنموذج ككل له معنوية احصائية.

- نرفض الفرضية H_1 إذا كانت $F_{cal} < F_{(k-1.n-k)}^{\alpha=5\%}$ ، ومنه: $\forall i = 1......k \quad \beta_i = 0$ ، وبالتالي فالنموذج ككل ليس له معنوية احصائية.

__**مثال:**__ من المثال السابق ادرس صلاحية النموذج الاحصائية الجزئية والكلية عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

- **المعنوية الجزئية:** من خلال اختبار STUDENT لمعلمات النموذج، وهو ما يوضحه الجدول التالي:

المعلمة	شكل الاختبار	St_{cal}	St_{tab}	القــرار
β_1	$H_0 : \beta_1 = 0 \quad / \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$	4.02	$St_{(10-3)}^{2.5\%} = 2.365$	نقبل $H_1 : \beta_1 \neq 0$
β_2	$H_0 : \beta_2 = 0 \quad / \quad H_1 : \beta_2 \neq 0$	3.34		نقبل $H_1 : \beta_2 \neq 0$
β_3	$H_0 : \beta_3 = 0 \quad / \quad H_1 : \beta_3 \neq 0$	2.38		نقبل $H_1 : \beta_3 \neq 0$

- المعنوية الكلية: من خلال اختبار FISHER، والذي يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \\ H_1 : \exists\, \beta_i \neq 0 \quad i = 1 \dots 3 \end{cases}$$

إحصائية FISHER المحسوبة تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{R^2 / k-1}{(1-R^2) / n-k} = \frac{0.9219 / 3-1}{(1-0.9219) / 10-3} = 41.32$$

إحصائية FISHER المجدولة:

$$F_{tab} = F_{(k-1.n-k)}^{\alpha=5\%} = F_{(2.7)}^{\alpha=5\%} = 4.737$$

القرار:

نلاحظ أن $F_{cal} > F_{(2.7)}^{\alpha=5\%}$ ، وبالتالي نقبل الفرضية H_1 ، أي: $\exists \beta_i \neq 0$ ، ومنه فالنموذج ككل له معنوية احصائية.

1-2- اختبار فيشر للقيود المتعددة: WALD TEST:

يستعمل اختبار STUDENT لاختبار فرضية من قيد واحد، أما في حالة القيود المتعددة فالواجب تطبيق اختبار فيشر كمايلي:

لتكن فرضية العدم والفرضية البديلة في شكل مصوفات والتي تضع قيودا على مجموعة من المعلمات كمايلي:

$$\begin{cases} H_0 : R\beta = r \\ H_1 : R\beta \neq r \end{cases}$$

حيث:

R : مصفوفة بعدها $(q \times k)$ ، β : شعاع المعلمات $(k \times 1)$.

r : شعاع بعده $(q \times 1)$ ، ويمثل عدد القيود، وهو أيضا عدد أسطر المصفوفة R.

أما خصائص الشعاع $R\hat{\beta}$ فهي كمايلي:

المتوسط:

$$i/ \quad E(R\hat{\beta}) = RE(\hat{\beta}) = R\beta$$
$$ii/ \quad \Omega_{R\hat{\beta}} = R'\delta_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} R = \delta_\varepsilon^2 R'(X'X)^{-1} R$$

ومن فرضية التوزيع الطبيعي للأخطاء نجد أن: $R\hat{\beta} \to N(R\beta \quad . \quad \delta_\varepsilon^2 R'(X'X)^{-1} R)$

وبتطبيق نظرية النهاية المركزية نجد أن: $\left(R\hat{\beta} - R\beta\right)\left(\delta_\varepsilon^2 R'(X'X)^{-1} R\right)^{-1} \to N(0.1)$

وبالتربيع نجد: $\left(R\hat{\beta} - R\beta\right)'\left(\delta_\varepsilon^2 R'(X'X)^{-1} R\right)^{-1}\left(R\hat{\beta} - R\beta\right) \to \chi_q^2$

وبما أن:

$$\frac{(n-k)\hat{\delta}_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2} \to \chi_{n-k}^2$$

بالقسمة نجد إحصائية FISHER المحسوبة تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{(R\hat{\beta} - R\beta)'(\hat{\delta}_\varepsilon^2 R'(X'X)^{-1} R)^{-1}(R\hat{\beta} - R\beta) \Big/ q}{\dfrac{(n-k)\hat{\delta}_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2} \Big/ n-k} \to F_{(q\,.\,n-k)}^{\alpha}$$

تحت ظل الفرضية H_0 وبالتبسيط نجد:

$$F_{cal} = {(R\hat{\beta}-r)'(\hat{\delta}_{\varepsilon}^2 R'(X'X)^{-1}R)^{-1}(R\hat{\beta}-r)}\Big/{q} \to F^{\alpha}_{(q\,.\,n-k)}$$

أو أيضا:

$$F_{cal} = \frac{(R\hat{\beta}-r)'(R'(X'X)^{-1}R)^{-1}(R\hat{\beta}-r)\Big/q}{e'e\Big/n-k} \to F^{\alpha}_{(q\,.\,n-k)}$$

القرار:

- نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $F_{cal} \geq F^{\alpha=5\%}_{(q.n-k)}$ ، ومنه: $R\beta \neq r$.
- نرفض الفرضية H_1 إذا كانت $F_{cal} < F^{\alpha=5\%}_{(q.n-k)}$ ، ومنه: $R\beta = r$.

<u>مثال:</u> من المثال السابق اختبر الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0 : \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\ 1\\ -3\end{pmatrix} \\ H_1 : \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}6\\ 1\\ -3\end{pmatrix} \end{cases}$$

نكتب فرضية العدم من الشكل: $R\beta = r$

$$H_0 : \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\ 1\\ -3\end{pmatrix} \Rightarrow \underset{R}{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}} \cdot \underset{\beta}{\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}} = \underset{r}{\begin{pmatrix}6\\ 1\\ -3\end{pmatrix}}$$

حيث: R : مصفوفة بعدها (3×3) ، β: شعاع المعلمات (3×1) ، r : شعاع بعده (3×1) .

احصائية FISHER المحسوبة تعطى كمايلي:

$$F_{cal}=\frac{(R\hat{\beta}-r)'(R'(X'X)^{-1}R)^{-1}(R\hat{\beta}-r)/q}{e'e/n-k}\rightarrow F^{\alpha}_{(q\,.\,n-k)}$$

$$\left(R\hat{\beta}-r\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6.29\\0.24\\-3.30\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.29\\-0.76\\-0.30\end{pmatrix}$$

$$\left(R\hat{\beta}-r\right)'=\begin{pmatrix}0.29&-0.76&-0.30\end{pmatrix}$$

$$(R'(XX)^{-1}R)^{-1}=\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}16.23&-0.690&-14.46\\-0.690&0.034&0.556\\-14.46&0.556&13.70\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}10&85&7.1\\85&805&57\\7.1&57&5.25\end{pmatrix}$$

$$F_{cal}=\frac{\begin{pmatrix}0.29&-0.76&-0.30\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10&85&7.1\\85&805&57\\7.1&57&5.25\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.29\\-0.76\\-0.30\end{pmatrix}/3}{1.05/10-3}=\frac{453.57/3}{0.15}=1007.93$$

احصائية FISHER المجدولة تعطى كمايلي:

$$F_{tab}=F^{\alpha=5\%}_{(q.n-k)}=F^{\alpha=5\%}_{(3.7)}=4.35$$

نلاحظ أن: $\left[F_{cal}=1007.93\right]\geq\left[F^{\alpha=5\%}_{(3.7)}=4.35\right]$، ومنه نقبل الفرضية H_1 ، أي: $R\beta\neq r$ ، وبالتالي فإن: $\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}6\\1\\-3\end{pmatrix}$

2-4- اختبارات التغير الهيكلي:

عند استخدام نموذج انحدار على بيانات سلاسل زمنية، يمكن أن يحدث تغير هيكلي في العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المفسرة، ويقصد بالتغير الهيكلي في هذه الحالة أن قيمة معلمات النموذج لا تبقى كما هي خلال كل الفترة الزمنية، فقد يحدث التغير الهيكلي نتيجة لقوة خارجية، أو نتيجة لتغير السياسات الاقتصادية، كالتحول من نظام اقتصادي إلى آخر، أو أي أسباب أخرى.

وتعرف هذه الاختبارات أيضا باختبارات استقرار معلمات النموذج، وتهدف إلى معرفة مدى استقرارية معلمات النموذج عبر الزمن،. من أهم هذه الاختبارات نذكر:

2-4-1- اختبار CHOW"' CHOW FORECAST TEST":

يسمح هذا الاختبار بمعرفة إذا ما كانت معلمات النموذج تتغير مع الزمن أم لا، ولتطبيق هذا الاختبار يجب معرفة وتحديد زمن التغير في حالة بيانات السلاسل الزمنية، أو معرفة المفردة التي حصل عندها التغير في حالة البيانات المقطعية. وبالتالي فهذا الاختبار يسمح بمعرفة إذا كانت المعلمات المقدرة قبل التغير هي نفسها بعد التغير. ويمر هذا الاختبار بالمراحل التالية:

- **المرحلة الأولى:**

- تقسيم المشاهدات إلى عينتين، العينة الأولى طولها n_1 مشاهدة، والعينة الثانية طولها n_2 مشاهدة، حيث: $n_1 + n_2 = n$.
- تقدير نموذجين لكل عينة بطريقة المربعات الصغرى العادية:

$$Y_t = \beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} X_{2t} + \beta_3^{(1)} X_{3t} + \ldots\ldots + \beta_k^{(1)} X_{kt} + \varepsilon_t \qquad / t = 1 \ldots\ldots n_1$$
$$Y_t = \beta_1^{(2)} + \beta_2^{(2)} X_{2t} + \beta_3^{(2)} X_{3t} + \ldots\ldots + \beta_k^{(2)} X_{kt} + \varepsilon_t \qquad / t = n_1 + 1 \ldots\ldots n_2$$

- ✓ حساب مجموع مربعات بواقي التقدير للنموذجين السابقين، أي حساب RSS_1 و RSS_2.
- ✓ تقدير النموذج على طول الفترة الزمنية الكلية والمقدرة بـ: n مشاهدة:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \ldots\ldots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t \qquad / t = 1 \ldots\ldots n$$

- ✓ حساب مجموع مربعات بواقي التقدير للنموذج السابق، أي حساب RSS.

- **المرحلة الثانية:** نقوم باختبار الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0 : \begin{cases} \beta_1 = \beta_1^{(1)} = \beta_1^{(2)} \\ \beta_2 = \beta_2^{(1)} = \beta_2^{(2)} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \beta_k = \beta_k^{(1)} = \beta_k^{(2)} \end{cases} \\ H_1 : \quad \exists i \quad / \beta_i \neq \beta_i^{(1)} \neq \beta_i^{(2)} \end{cases}$$

إيجاد إحصائية FISHER المحسوبة، والتي تعطى بالعلاقة التالية:

$$F_{cal} = \frac{[RSS - (RSS_1 + RSS_2)] / df_1}{(RSS_1 + RSS_2) / df_2}$$

حيث:

$$df_1 = (n-k) - [(n_1 - k) + (n_2 - k)] = k$$
$$df_1 = (n_1 - k) + (n_2 - k) = n - 2k$$

إيجاد إحصائية FISHER المجدولة بدرجة حرية $\nu_1 = k$ و $\nu_2 = n - 2k$، أي $F_{tab} = F_{(k.n-2k)}^{\alpha=5\%}$.

القرار:

- نرفض الفرضية H_0 إذا كانت $F_{cal} \geq F_{(k.n-2k)}^{\alpha=5\%}$، ومنه: $\exists i \quad / \beta_i \neq \beta_i^{(1)} \neq \beta_i^{(2)}$، وبالتالي فالنموذج غير مستقر، أي هناك تغير هيكلي.

- نرفض الفرضية H_1 إذا كانت $F_{cal} < F_{(k.n-2k)}^{\alpha=5\%}$، ومنه: $\forall i = 1 \ldots\ldots k \quad \beta_i = \beta_i^{(1)} = \beta_i^{(2)}$، وبالتالي فالنموذج مستقر، أي لا يوجد تغير هيكلي.

مثال: من المثال السابق كان النموذج المقدر كمايلي:

$$\hat{Y}_t = 6.29 + 0.24 \cdot X_{2t} - 3.30 \cdot X_{3t}$$
$$(1.56) \quad (0.07) \qquad (1.43)$$
$$n = 10 \quad TSS = 13.5 \quad ESS = 12.44 \quad RSS = 1.05$$

بافتراض أن هناك شك بحدوث تغير هيكلي بداية من السنة السادسة، فإن اختبار CHOW يكون كمايلي:

- المرحلة الأولى: تقدير نموذجين لكل عينة مع حساب مجموع مربعات بواقي التقدير:

نموذج الفترة الأولى:

$$\hat{Y}_t = 1.33 + 0.44 \cdot X_{2t} + 1.11 \cdot X_{3t}$$
$$(1.77) \quad (0.07) \qquad (1.68)$$
$$n_1 = 5 \quad TSS_1 = 2.5 \quad ESS_1 = 2.44 \quad RSS_1 = 0.055$$

نموذج الفترة الثانية:

$$\hat{Y}_t = 7.96 + 0.07 \cdot X_{2t} - 2.95 \cdot X_{3t}$$
$$(1.62) \quad (0.09) \qquad (1.54)$$
$$n_2 = 5 \quad TSS_2 = 1.00 \quad ESS_2 = 0.741 \quad RSS_2 = 0.258$$

- المرحلة الثانية: نقوم باختبار الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0 : \begin{cases} \beta_1 = \beta_1^{(1)} = \beta_1^{(2)} \\ \beta_2 = \beta_2^{(1)} = \beta_2^{(2)} \\ \beta_3 = \beta_3^{(1)} = \beta_3^{(2)} \end{cases} \\ H_1 : \quad \exists i \quad / \beta_i \neq \beta_i^{(1)} \neq \beta_i^{(2)} \end{cases}$$

إيجاد إحصائية FISHER المحسوبة:

$$F_{cal} = \frac{[RSS - (RSS_1 + RSS_2)]/k}{(RSS_1 + RSS_2)/n - 2k} = \frac{[1.05 - (0.055 + 0.258)]/3}{(0.055 + 0.258)/10 - 2(3)} = \frac{0.245}{0.078} = 3.13$$

إيجاد إحصائية FISHER المجدولة:

$$F_{tab} = F_{(k.n-2k)}^{\alpha=5\%} = F_{(3.10-2(3))}^{\alpha=5\%} = F_{(3.4)}^{\alpha=5\%} = 6.59$$

القرار:

نلاحظ أن $\left(F_{cal} = 3.13\right) < \left(F_{(3.4)}^{\alpha=5\%} = 6.59\right)$ وبالتالي نرفض الفرضية H_1 ، أي نقبل أن: $\beta_i = \beta_i^{(1)} = \beta_i^{(2)} \quad \forall i = 1......k$ وبالتالي فالنموذج مستقر، أي لا يوجد تغير هيكلي.

2-4-2- اختبارات الاستقرارية المعتمدة على البواقي المتكررة:

يفترض اختبار التغير الهيكلي لـCHOW: أن نقطة التغير معلومة، بالمقابل فإن الاختبارات المتعمدة على البواقي المتكررة فهي تسمح بتحديد هل هناك تغير هيكلي أم لا من جهة، كما تسمح بتحديد نقطة التغير الهيكلي من جهة أخرى. ومن أهمها نجد:

اختبار البواقي المتكررة RECURSIVE RESIDUALS:[1]

تعتمد فكرة البواقي المتكررة على التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغير التابع Y_t لما نستعمل $r-1$ مشاهدة فقط.، ثم حساب بواقي التقدير، أي:

$$e_r = Y_r - \left[\hat{\beta}_1^{r-1} + \hat{\beta}_2^{r-1} X_{2r} + \hat{\beta}_3^{r-1} X_{3r} + \cdots + \hat{\beta}_k^{r-1} X_{kr}\right]$$

حيث: $\hat{\beta}_i^{r-1}$: هي مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية للنموذج من خلال عينة مشاهدات حجمها $r-1$.

بداية التقدير تكون من $r = k+1$.

تباين التنبؤ يكون: $V(e_r) = \hat{\delta}^2_{\varepsilon_{r-1}}\left[1 + X'_r (X'_{r-1} X_{r-1})^{-1} X_r\right]$

البواقي المتكررة w_r تعطى بالعلاقة التالية:

$$w_r = \frac{e_r}{\sqrt{1 + X'_r (X'_{r-1} X_{r-1})^{-1} X_r}}$$

تحت فرضية الاستقرارية البواقي المتكررة تتبع التوزيع الطبيعي، أي: $w_r \rightarrow N(0.\delta^2_{w_r})$

ويكون قرار الاختبار كمايلي:

$$si\ w_r \in \left[-2\sqrt{\hat{\delta}^2_{\varepsilon_{r-1}}\left[1 + X'_r (X'_{r-1} X_{r-1})^{-1} X_r\right]}\ \ .\ \ +2\sqrt{\hat{\delta}^2_{\varepsilon_{r-1}}\left[1 + X'_r (X'_{r-1} X_{r-1})^{-1} X_r\right]}\right] \quad \forall\ r = k+1 \cdots n$$

فيكون النموذج مستقرا، وبالتالي عدم وجود تغير هيكلي.

$$si\ \exists\ r / w_r \notin \left[-2\sqrt{\hat{\delta}^2_{\varepsilon_{r-1}}\left[1 + X'_r (X'_{r-1} X_{r-1})^{-1} X_r\right]}\ \ .\ \ +2\sqrt{\hat{\delta}^2_{\varepsilon_{r-1}}\left[1 + X'_r (X'_{r-1} X_{r-1})^{-1} X_r\right]}\right] \quad \forall\ r = k+1 \cdots n$$

فيكون النموذج غير مستقر، وبالتالي وجود تغير هيكلي عند النقطة r.

<u>مثال</u>: من المثال السابق اختبر وجود تغير هيكلي اعتمادا على اختبار البواقي المكررة.

الشكل العام للنموذج هو: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \varepsilon_t$

[1] - WILLIAM H. GREENE, Econometric Analysis, Fifth Edition, Pearson Education, New Jersey, USA, 2002, 135.

من النموذج نجد أن عدد معلمات النموذج هو ثلاث معلمات، وبالتالي فإننا نقوم بتقدير كل النماذج على عينات مشاهدات أصغرها عددا هو $r = k+1 = 4$ ، أي نموذج للفترة $t = 1...4$ ، ونموذج للفترة $t = 1...5$ ، وهكذا إلى غاية الفترة $t = 1...10$.

نتائج تقدير مختلف النماذج مدرجة بالجدول الموالي:

الفترة	$t=1...4$	$t=1...5$	$t=1...6$	$t=1...7$	$t=1...8$	$t=1...9$	$t=1...10$
$\hat{\beta}_1$	2.00	1.333	7.25	7.473	6.552	6.307	6.294
$\hat{\beta}_2$	0.50	0.444	0.281	0.216	0.266	0.258	0.241
$\hat{\beta}_3$	0.00	1.111	-4.788	-4.605	-3.839	-3.468	-3.305
$\hat{\delta}_\varepsilon$	0.00	0.166	0.441	0.459	0.417	0.394	0.388

حساب بواقي التقدير:

$$\begin{aligned} e_5 &= Y_5 - \left[\hat{\beta}_1^{5-1} + \hat{\beta}_2^{5-1}X_{25} + \hat{\beta}_3^{5-1}X_{35}\right] = Y_5 - \left[\hat{\beta}_1^{4} + \hat{\beta}_2^{4}X_{25} + \hat{\beta}_3^{4}X_{35}\right] \\ &= 6 - [2.00 + 0.50\cdot 9 + 0.00\cdot 0.70] = -0.50 \end{aligned}$$

$$\left(X_{04}{}'X_{04}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 22 & 0.34 \\ 22 & 126 & 18.6 \\ 0.34 & 18.6 & 2.9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 121.5 & -3.5 & -120 \\ -3.5 & 0.25 & 2.5 \\ -120 & 2.5 & 125 \end{pmatrix}$$

$$X_5 = (1 \quad 9 \quad 0.7)$$

$$w_5 = \frac{e_5}{\sqrt{1 + X_5'(X_4'X_4)^{-1}X_5}} = \frac{-0.50}{\sqrt{1+3.50}} = -0.235$$

$$\begin{aligned} &\left[-2\hat{\delta}_{\varepsilon_{5-1}}\sqrt{\left[1 + X_5'(X_{5-1}'X_{5-1})^{-1}X_5\right]} \quad . \quad +2\hat{\delta}_{\varepsilon_{5-1}}\sqrt{\left[1 + X_5'(X_{5-1}'X_{5-1})^{-1}X_5\right]}\right] \\ &= \left[-2\cdot 0\cdot\sqrt{[1+3.5]} \quad . \quad +2\cdot 0\cdot\sqrt{[1+3.5]}\right] = [0\ .\ 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_6 &= Y_6 - \left[\hat{\beta}_1^{6-1} + \hat{\beta}_2^{6-1}X_{26} + \hat{\beta}_3^{6-1}X_{36}\right] = Y_6 - \left[\hat{\beta}_1^{5} + \hat{\beta}_2^{5}X_{26} + \hat{\beta}_3^{6}X_{36}\right] \\ &= 7 - [1.333 + 0.444\cdot 8 + 1.111\cdot 0.60] = 1.448 \end{aligned}$$

$$\left(X_{05}{}'X_{05}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 31 & 4.1 \\ 31 & 207 & 24.9 \\ 4.1 & 24.9 & 3.39 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 113.5 & -4.16667 & -106.667 \\ -4.16667 & 0.19444 & 3.61111 \\ -106.667 & 3.61111 & 102.778 \end{pmatrix}$$

$$X_6 = (1 \quad 8 \quad 0.6)$$

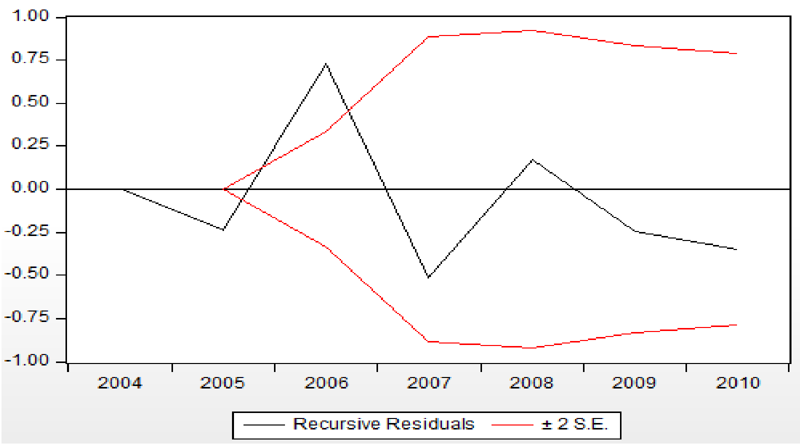
$$w_6 = \frac{e_6}{\sqrt{1 + X_6'(X_5'X_5)^{-1}X_6}} = \frac{1.448}{\sqrt{1+2.944}} = 0.7273$$

$$\begin{aligned} &\left[-2\hat{\delta}_{\varepsilon_{6-1}}\sqrt{\left[1 + X_6'(X_{6-1}'X_{6-1})^{-1}X_5\right]} \quad . \quad +2\hat{\delta}_{\varepsilon_{6-1}}\sqrt{\left[1 + X_6'(X_{6-1}'X_{6-1})^{-1}X_6\right]}\right] \\ &= \left[-2\cdot 0.166\cdot\sqrt{[1+2.944]} \quad . \quad +2\cdot 0.166\cdot\sqrt{[1+2.944]}\right] = [-0.33 \quad . \quad 0.33] \end{aligned}$$

والجدول التالي يبين البواقي المتكررة w_r كمايلي:

الفترة	5	6	7	8	9	10
w_t	-0.236	0.727	-0.509	0.169	-0.243	-0.350
$-2\sqrt{\hat{\delta}^2_{\varepsilon_{r-1}}\left[1+X'_r(X'_{r-1}X_{r-1})^{-1}X_r\right]}$	0	-0.33	-0.883	-0.919	-0.835	-0.788
$+2\sqrt{\hat{\delta}^2_{\varepsilon_{r-1}}\left[1+X'_r(X'_{r-1}X_{r-1})^{-1}X_r\right]}$	0	0.33	0.883	0.919	0.835	0.788

وهو ما يبينه الشكل التالي:



من خلال الجدول والتمثيل البياني نجد أن :

$$w_5 \notin [0 \quad . \quad 0] \qquad\qquad w_6 \notin [-0.33 \quad . \quad 0.33]$$

وبالتالي وجود تغير هيكلي سنتي 2005 و2006 على التوالي.

خامسا: التنبؤ باستعمال النموذج الخطي المتعدد:

نظرا لأن المتغيرات التفسيرية (المستقلة) محددة خارج النموذج الخطي المتعدد المقدر، وبمعرفتنا بالقيم المستقبلية لهذه المتغيرات، فإنه يمكننا التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغير التابع. فإذا افترضنا أن المتغيرات المستقلة معرفة من أجل المشاهدة $n+h \quad (h=1.2.3....)$ ، فيكون التنبؤ المستقبلي يقيم المتغير التابع لفترة واحدة كمايلي:

$$\hat{Y}_n(1)=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2X_{2.n+1}+\hat{\beta}_3X_{3.n+1}+\text{L L }+\hat{\beta}_kX_{k.n+1}$$

التنبؤ لفترتين في المستقبل:

$$\hat{Y}_n(2)=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2X_{2.n+2}+\hat{\beta}_3X_{3.n+2}+\text{L L }+\hat{\beta}_kX_{k.n+2}$$

التنبؤ لفترات h في المستقبل:

$$\hat{Y}_n(h)=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2X_{2.n+h}+\hat{\beta}_3X_{3.n+h}+\text{L L }+\hat{\beta}_kX_{k.n+h}$$

حيث: $h = 1.2.3....H$ يسمى بأفق التنبؤ.

وعليه نصل إلى التنبؤ للفترة H في المستقبل كما يلي:

$$\hat{Y}_n(H) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2.n+H} + \hat{\beta}_3 X_{3.n+H} + \cdots \cdots + \hat{\beta}_k X_{k.n+H}$$

إذن إذا أردنا التنبؤ بمجموعة من المشاهدات المستقبلية بأفق تنبؤ يساوي H فترة زمنية، فإن شعاع القيم التنبؤية للمتغير التابع يكون كمايلي:

$$\hat{Y}_n(H) = \begin{pmatrix} \hat{Y}_n(1) \\ \hat{Y}_n(2) \\ \vdots \\ \hat{Y}_n(H) \end{pmatrix}_{(H.1)}$$

أما مصفوفة المتغيرات المفسرة المستقبلية فتكون كما يلي:

$$X_{n+H} = \begin{pmatrix} 1 & X_{2.n+1} & X_{3.n+1} & \cdots & X_{k.n+1} \\ 1 & X_{2.n+2} & X_{3.n+2} & \cdots & X_{k.n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2.n+H} & X_{3.n+H} & \cdots & X_{k.n+H} \end{pmatrix}_{(H.k)}$$

وبالتالي يمكن كتابة النموذج الخطي العام المتنبأ به على الشكل التالي:

$$Y_n(H) = X_{n+H} \cdot \beta + \varepsilon_{n+H}$$

بينما النموذج المقدر فيأخذ الشكل التالي:

$$\hat{Y}_n(H) = X_{n+H} \cdot \hat{\beta}$$

ومنه يكون متوسط مقدر التنبؤ كمايلي:

$$E\left(\hat{Y}_n(H)\right) = X_{n+H} \cdot E(\hat{\beta}) = X_{n+H} \cdot \beta = E\left(Y_n(H)\right)$$

ومنه نقول أن $E\left(\hat{Y}_n(H)\right)$ عبارة عن تنبؤ غير متحيز للعبارة: $X_{n+H} \cdot \beta = E\left(Y_n(H)\right)$.

ليكون التباين:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{Y}_n(H)\right) = E\left(\left(\hat{Y}_n(H) - X_{n+H} \cdot \beta\right)\left(\hat{Y}_n(H) - X_{n+H} \cdot \beta\right)'\right) = \delta_\varepsilon^2 X_{n+H} (X'X)^{-1} X'_{n+H}$$

أما شعاع أخطاء التنبؤ فيكون كمايلي:

$$\hat{e}_{n+H} = Y_{n+H} - \hat{Y}_n(H) \Rightarrow E(\hat{e}_{n+H}) = E(Y_{n+H} - \hat{Y}_n(H)) = 0$$

أما تباين شعاع أخطاء التنبؤ فيعطى كما يلي:

$$\mathrm{Var}(\hat{e}_{n+H}) = \mathrm{Var}(Y_{n+H} - \hat{Y}_n(H)) \Rightarrow E\left[\left(-X_{n+H}\left(\hat{\beta}-\beta\right)+\varepsilon_{n+H}\right)\left(-X_{n+H}\left(\hat{\beta}-\beta\right)+\varepsilon_{n+H}\right)'\right]$$
$$= \delta_\varepsilon^2 X'_{n+H}(X'X)^{-1}X_{n+H} + \delta_\varepsilon^2 I_H = \delta_\varepsilon^2\left(X'_{n+H}(X'X)^{-1}X_{n+H} + I_H\right)$$

ويكون هذا التنبؤ هو أحسن تنبؤ خطي غير متحيز (BLUP) يمكن الحصول عليه، حيث إذا عرفنا $\tilde{Y}_n(H)$ تنبؤ آخر خطي لعينة مشاهدات المتغير التابع مع متوسط خطأ التنبؤ مساو للصفر، $E(Y_{n+H} - \tilde{Y}_n(H)) = 0$ ، تكون لدينا المتراجحة:

$$\mathrm{Var}(Y_{n+H} - \tilde{Y}_n(H)) - \mathrm{Var}(Y_{n+H} - \hat{Y}_n(H)) \geq 0$$

ومنه يمكننا القول أن: $\hat{Y}_n(H) = X_{n+H}\cdot\hat{\beta}$ هو أحسن تنبؤ خطي غير متحيز.

وتكون اختبارات التنبؤ عن طريق إيجاد التوزيع الذي يعتبر فرضية العدم والقائلة بأن النموذج الخطي العام يبقى محافظا على شكله من الفترة الأولى إلى غاية الفترة $n+H$ ، أي:

$$H_0: \quad \hat{Y} = X\hat{\beta} \quad t = 1.\,....n.\ n+1.\ n+2........n+h........n+H$$

وذلك ضد الفرضية البديلة، والتي تنص على أن نموذج العينة الأولى n يختلف عن نموذج التنبؤ للفترة H .

$$F = \frac{\left(Y_{n+H} - \hat{Y}_n(H)\right)'\left[X'_{n+H}(X'X)^{-1}X_{n+H} + I_H\right]^{-1}\left(Y_{n+H} - \hat{Y}_n(H)\right)/H}{\hat{\delta}_\varepsilon^2} \rightarrow F^\alpha_{(H.n-k)}$$

وإذا كان $H = 1$ يصبح التوزيع أعلاه كما يلي:

$$F = \frac{\left(Y_{n+1} - \hat{Y}_n(1)\right)'\left[X'_{n+1}(X'X)^{-1}X_{n+1} + I_1\right]^{-1}\left(Y_{n+1} - \hat{Y}_n(1)\right)}{\hat{\delta}_\varepsilon^2} \rightarrow F^\alpha_{(1.n-k)}$$

<u>**مثال:**</u> بالرجوع الى المثال السابق واذا علمنا أن القيم المستقبلية (الفترة 11) X_2 و X_3 هي 12 و0.80 على التوالي، فيمكن التنبؤ بالمتغير Y للفترة 11 كمايلي:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{11} = \hat{Y}_{10}(1) &= 6.29 + 0.24\cdot X_{2.11} - 3.30\cdot X_{3.11}\\ &= 6.29 + 0.25\cdot(12) - 3.30\cdot(0.80)\\ &= 6.65\end{aligned}$$

لإيجاد مجال الثقة للتنبؤ يجب حساب الانحراف المعياري لخطأ التنبؤ كمايلي:

$$0.1505\begin{pmatrix} 16.23 & -0.690 & -14.46\\ -0.690 & 0.034 & 0.556\\ -14.46 & 0.556 & 13.70\end{pmatrix}$$

$$\hat{Var}(\hat{e}_{n+H}) = \hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}\left(X'_{n+H}(X'X)^{-1}X_{n+H} + I_H\right)$$

$$= (0.1505)\left((1 \quad 12 \quad 0.80)\begin{pmatrix} 16.23 & -0.690 & -14.46 \\ -0.690 & 0.034 & 0.556 \\ -14.46 & 0.556 & 13.70 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 0.80 \end{pmatrix} + 1\right)$$

$$= (0.1505)\left((-3.762 \quad 0.1628 \quad 3.172)\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 0.80 \end{pmatrix} + 1\right) = (0.1505)(1.7292) = 0.2602$$

وبالتالي يكون الانحراف المعياري لخطأ التنبؤ: $\hat{\delta}_{\hat{e}_{n+H}} = \sqrt{0.2602} = 0.51$

إذن مجال الثقة يكون كمايلي:

$$Y_n(1) \in \left[\hat{Y}_n(1) - St_{(n-k)}^{2.5\%}\hat{\delta}_{\hat{e}_{n+1}} \quad . \quad \hat{Y}_n(1) + St_{(n-k)}^{2.5\%}\hat{\delta}_{\hat{e}_{n+1}}\right]$$

$$(Y_{10}(1) = Y_{11}) \in [6.65 - 2.365(0.51) \quad . \quad 6.65 + 2.365(0.51)]$$

$$Y_{11} \in [5.44 \quad . \quad 7.85]$$

الجداول الاحصائية

Table 01: **Critical values of the St-distribution**

ν \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Table 02: **Critical values of the F-distribution**

	$\nu_1 = 1$		$\nu_1 = 2$		$\nu_1 = 3$		$\nu_1 = 4$		$\nu_1 = 5$	
ν_2	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$
1	161.4	4052.00	199.5	4999.00	213.7	3403.00	224.6	5625.00	230.2	5764.00
2	18.51	98.49	19.00	99.00	19.16	99.17	19.25	99.25	19.30	99.30
3	10.13	34.12	9.55	30.81	9.28	29.46	9.12	28.71	9.01	28.24
4	7.71	21.20	6.94	18.00	6.59	16.69	6.39	13.98	6.26	13.32
5	6.61	16.26	5.79	13.27	5.41	12.06	5.19	11.39	5.03	10.97
6	3.99	13.74	3.14	10.91	4.76	9.78	4.53	9.13	4.39	8.75
7	3.39	12.23	4.74	9.35	4.33	8.43	4.12	7.85	3.97	7.45
8	3.32	11.26	4.46	8.63	4.07	7.39	3.84	7.01	3.69	6.63
9	5.12	10.56	4.26	8.02	3.86	6.99	3.63	6.42	3.48	6.06
10	4.96	10.04	4.10	7.56	3.71	6.33	3.48	5.99	3.33	5.64
11	4.84	9.65	3.98	7.20	3.59	6.22	3.36	5.67	3.20	5.32
12	4.75	9.33	3.88	6.93	3.49	5.93	3.26	5.41	3.11	5.06
13	4.67	9.07	3.80	6.70	3.41	5.74	3.18	5.20	3.02	4.86
14	4.60	8.86	3.74	6.31	3.34	5.56	3.11	5.03	2.96	4.69
15	4.34	8.68	3.68	6.36	3.29	5.42	3.06	4.89	2.90	4.56
16	4.49	8.53	3.63	6.23	3.24	5.29	3.01	4.77	2.85	4.44
17	4.45	8.40	3.59	6.11	3.20	5.18	2.96	4.67	2.81	4.34
18	4.41	8.28	3.53	6.01	3.16	5.09	2.93	4.58	2.77	4.25
19	4.38	8.18	3.52	5.93	3.13	5.01	2.90	4.50	2.74	4.17
20	4.35	8.10	3.49	5.85	3.10	4.94	2.87	4.43	2.71	4.10
21	4.32	8.02	3.47	5.78	3.07	4.87	2.84	4.37	2.68	4.04
22	4.30	7.94	3.44	5.72	3.05	4.82	2.82	4.31	2.66	3.99
23	4.28	7.88	3.42	5.66	3.03	4.76	2.80	4.26	2.64	3.94
24	4.26	7.82	3.40	5.61	3.01	4.72	2.78	4.22	2.62	3.90
25	4.24	7.77	3.38	5.37	2.99	4.68	2.76	4.18	2.60	3.86
26	4.22	7.72	3.37	5.33	2.98	4.64	2.74	4.14	2.39	3.82
27	4.21	7.68	3.33	5.49	2.96	4.60	2.73	4.11	2.37	3.78
28	4.20	7.64	3.34	5.43	2.95	4.57	2.71	4.07	2.56	3.75
29	4.18	7.60	3.33	5.42	2.93	4.34	2.70	4.04	2.34	3.73
30	4.17	7.56	3.32	5.39	2.92	4.31	2.69	4.02	2.53	3.70
40	4.08	7.31	3.23	5.18	2.84	4.31	2.61	3.83	2.43	3.31
60	4.00	7.08	3.15	4.98	2.76	4.13	2.32	3.65	2.37	3.34
120	3.92	6.85	3.07	4.79	2.68	3.93	2.43	3.48	2.29	3.17
∞	3.84	6.64	2.99	4.60	2.60	3.78	2.37	3.32	2.21	3.02

Table 03: Critical values of the chi-square distribution

ν \ α	0.995	0.975	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01
1	0.0000393	0.000982	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635
2	0.0100	0.0506	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210
3	0.0717	0.216	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345
4	0.207	0.484	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277
5	0.412	0.831	7.289	9.236	11.070	12.833	13.388	15.086
6	0.676	1.237	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812
7	0.989	1.690	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475
8	1.344	2.180	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090
9	1.735	2.700	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666
10	2.156	3.247	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209
11	2.603	3.816	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725
12	3.074	4.404	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217
13	3.565	5.009	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688
14	4.075	5.629	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141
15	4.601	6.262	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578
16	5.142	6.908	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000
17	5.697	7.564	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409
18	6.265	8.231	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805
19	6.844	8.907	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191
20	7.434	9.591	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566
21	8.034	10.283	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932
22	8.643	10.982	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289
23	9.260	11.689	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638
24	9.886	12.401	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980
25	10.520	13.120	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314
26	11.160	13.844	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642
27	11.808	14.573	32.912	36.741	40.113	43.195	44.140	46.963
28	12.461	15.308	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278
29	13.121	16.047	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588
30	13.787	16.791	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892
50	27.991	32.357	58.164	63.167	67.505	71.420	72.613	76.154
100	67.328	74.222	111.667	118.498	124.342	129.561	131.142	135.807

Table 04: **Critical Values for the Durbin-Watson Statistic ,Level of Significance α = 0.01**

n	k = 1		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5	
	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.30	0.48	1.85
18	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.27	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65
150	1.61	1.64	1.60	1.65	1.58	1.67	1.57	1.68	1.56	1.69
200	1.66	1.68	1.65	1.69	1.64	1.70	1.63	1.72	1.62	1.73

Table 05: **Critical Values for the Durbin-Watson Statistic ,Level of Significance α = 0.05**

n	k = l		k = 2		k = 3		k = 4		k = 5	
	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u	d_l	d_u
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.92	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.4	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.96	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78
150	1.72	1.75	1.71	1.76	1.69	1.77	1.68	1.79	1.66	1.80
200	1.76	1.78	1.75	1.79	1.74	1.80	1.73	1.81	1.72	1.82