Université Abdelhafid Boussouf de Mila
Institut des Mathématiques et Informatiques
Deuxième année LMD Mathématiques et Mathématiques appliquées 2023/2024

---

Matière : *Algèbre 4*
Responsable : *Y. Halim*

# Série de TD N° 2

***Exercice 1 :***

Montrer que les applications suivantes sont des formes bilinéaires, Sont-t-elles symétriques, anti-symétriques ?

1.

$$\begin{array}{rll} \Psi : & \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \mapsto \displaystyle\int_0^2 x^2 P(x) Q'(x) dx \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rll} f : & M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ & (A, B) & \mapsto Tr(AB) \end{array}$$

***Exercice 2 :***

Soit $\Psi$ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\begin{array}{rll} \Psi : & \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(x) Q(1-x) dx \end{array}$$

1. Montrer que $\Psi$ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la matrice de $\Psi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que $\Psi$ est non dégénérée.

***Exercice 3 :***

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Justifier que la matrice $A$ est symétrique.
2. Déterminer la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique est la matrice $A$.
3. Déterminer la forme quadratique associée.

***Exercice 4 :***

Soient les formes bilinéaires suivantes

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \mapsto & x_1 y_1 + 2x_2 y_2 - 4x_2 y_1 - 4x_1 y_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) & \mapsto & 3x_1 y_1 - 5x_2 y_2 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 3x_2 y_3 + 3y_2 x_3 \end{array}$$

1. Montrer que $f$ et $g$ sont symétriques.
2. Déterminer la forme quadratique associé a chaque forme bilinéaire.

***Exercice 5 :*** (Examen 2023)

Soit l'application

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \mapsto & 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 - 5x_2 y_2 \end{array}$$

1. Montrer que $f$ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer $Ann(f)$ le noyau de $f$. Déduire si $f$ est non dégénérée.
3. Déterminer la matrice de $f$ dans la base $\{\varepsilon_1 = (1, 1), \varepsilon_2 = (1, -3)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit l'ensemble
$$F = < (2, 1) >$$
Déterminer $F^{\perp}$ l'orthogonal e $F$.

***Références bibliographiques :***


1. Exercices corrigés d'algèbre linéaire, **Tom 2**, 510/27.
2. Dualité, formes quadratiques, formes hermitiennes : exercices corrigés avec rappels de cours, 510/12.
3. Algèbre linéaire et bilinéaire, 510/516.
4. Algèbre et géométrie, 2 année, 510/1058.
5. Algèbre linéaire : Cours et exercices corrigés 510/24.
6. Algèbre, exercices et problèmes, 510/420.