Centre universitaire de Mila
Institut de Mathématiques et Informatique
Première année LMD informatique 2023-2024
Matière : Algèbre II **Série 1**

Exercice n°1 : Soit X un ensemble non vide et soit $(E, +, \cdot)$ un K-espace vectoriel. On définit sur l'ensemble $\mathcal{F}(X, E) = E^X$ des applications définies sur X à valeurs dans E une addition (loi interne) $+$

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X,E) \times \mathcal{F}(X,E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(X,E) \\ (f,g) & \longmapsto & f+g, \end{array}$$

donnée par

$$\forall x \in X : (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

et une multiplication (loi externe) par un scalaire $\cdot$

$$\cdot : \begin{array}{ccc} K \times \mathcal{F}(X,E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(X,E) \\ (\alpha,f) & \longmapsto & \alpha \cdot f, \end{array}$$

donnée par

$$\forall x \in X : (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

1. Supposons que $(E^X, +)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $0_{E^X} = 0$ (application nulle). Montrer que $(E^X, +, .)$ est un $K-$espace vectoriel.

Exercice n°2 : Soient $(E, +, \cdot)$ un K-espace vectoriel. Montrer les règles suivantes :

1. $\forall x \in E, \forall \alpha \in K : \alpha \cdot 0_E = 0_E$ et $0_K \cdot x = 0_E$.
2. $\forall x \in E, \forall \alpha \in K : \alpha \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow \alpha = 0_K$ ou $x = 0_E$.
3. $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in K : \alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y$.
4. $\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in K : (\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x$.

Exercice n°3 : Déterminer si $\mathbb{R}^2$, muni des lois internes et externes suivantes, est ou n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

$$j) \ \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \begin{cases} (a,b) + (c,d) = (a+b, b+d) \\ \alpha \cdot (a,b) = (a, \alpha b) \end{cases}$$

$$jj) \ \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \begin{cases} (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \\ \alpha \cdot (a,b) = (\alpha^2 a, \alpha^2 b) \end{cases}$$

$$jjj) \ \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \begin{cases} (a,b) + (c,d) = (c,d) \\ \alpha \cdot (a,b) = (\alpha a, \alpha b) \end{cases}$$

Exercice n4 : Vérifier si les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels de E sur K :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{(x,y,z) \in E : x + y + z = a, a \in \mathbb{R}\}, \quad E = \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R} \\
F_2 &= \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in E, \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)\}, \quad E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), K = \mathbb{R} \\
F_3 &= \mathfrak{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in E, \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)\}, \quad E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), K = \mathbb{R} \\
F_4 &= \mathbb{R}_n[X] = \{P \in E : \deg(P) \leq n\}, n \in \mathbb{N}, \quad E = \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R} \\
F_5 &= \{f \in E : f \text{ est bornée}\}, \quad E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), K = \mathbb{R} \\
F_6 &= \{P \in E : P(0) = P(1) = 0\}, \quad E = \mathbb{R}[X], K = \mathbb{R}
\end{aligned}$$