المحور 01: نظرية المعاينة وتوزيعاتها

المحاضرة 02 : توزيع المعاينة للمتوسط وللنسبة في العينة

أولا: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\overline{X}$

1- توزيع المعاينة لـ $\overline{X}$ عند المعاينة من مجتمع طبيعي

نظرية 01 : توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\overline{X}$ بالنسبة لعينات عشوائية ذات الحجم n مأخوذة من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا متوسطه μ وتباينه σ_X^2 يكون مساويا لمتوسط المجتمع μ (سواء كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع)، أما تباينه S^2 فيكون:

في حالة السحب بالإرجاع (بالإعادة) $$S^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$$

في حالة السحب بدون إرجاع (بدون إعادة) $$S^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

ملاحظات:

- القيمة $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ تسمى بمعامل التصحيح أو الانتهاء.
- لمعرفة نوعية السحب نستعين بالقاعدة التالية:

سحب بدون إرجاع $$\frac{n}{N} \geq 0.05$$

سحب بالارجاع $$\frac{n}{N} < 0.05$$

سنتكلم الآن عن الحالات المختلفة لإيجاد توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\overline{X}$.

❖ **الحالة الأولى: تباين المجتمع الطبيعي معلوم (σ^2 معلوم)**

عندما يكون مجتمع موزع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ وتباين σ^2 معلوم أي: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ عندئذ يكون توزيع المتوسط الحسابي للعينة هو: $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

وتكون Z المعيارية هي:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

❖ **الحالة الثانية: تباين المجتمع الطبيعي مجهول (σ^2 مجهول)**

يجب أن نميز بين حالتين:

- **في حالة العينات الكبيرة ($n \geq 30$):**

يكون توزيع المتوسط الحسابي للعينة هو:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{S^2}{n})$$

ويكون التوزيع الطبيعي المعياري هو:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim N(0,1)$$

- **في حالة العينات الصغيرة ($n < 30$):**

في هذه الحالة توزيع المتوسط الحسابي للعينة سوف يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية $n - 1$ كمايلي:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t(n-1)$$

❖ **الحالة الثالثة: حجم العينة كبير ($n \geq 30$) والسحب بدون إرجاع من مجتمع محدود حجمه N.**

ندخل معامل التصحيح $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ على تباين العينة. وتوجد حالتين:

- **تباين المجتمع الطبيعي معلوم (σ^2 معلوم)**

في هذه الحالة يكون توزيع متوسط العينة هو:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1}\right)$$

أما التوزيع الطبيعي المعياري فيكون:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}}} \sim N(0,1)$$

- تباين المجتمع الطبيعي مجهول (σ^2 مجهول)

يكون توزيع متوسط العينة هو:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{S^2}{n}\frac{N-n}{N-1}\right)$$

أما التوزيع الطبيعي المعياري فيكون:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}\frac{N-n}{N-1}}} \sim N(0,1)$$

2- توزيع المعاينة للمتوسط $\bar{X}$ عند المعاينة من مجتمع غير طبيعي

نظرية (02): إذا سحبت عينة كبيرة حجمها n من مجتمع إحصائي غير طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2، فإن توزيع المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ بتطبيق نظرية النهاية المركزية سوف يتبع بالتقريب التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\bar{X}} = \mu$ وتباين $S^2 = \frac{\sigma^2}{n}$. وبالتالي فإن المتغير Z له التوزيع الطبيعي المعياري:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

ثانيا: توزيع المعاينة للنسبة في العينة

عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n \geq 30)$ فإن تطبيق نظرية النهاية المركزية يجعل توزيع المعاينة لنسبة العينة تقريبا طبيعيا بمتوسط يساوي إلى:

- $\mu_{\hat{P}} = P$

وتباين يساوي إلى:

- $\sigma^2_{\hat{P}} = \frac{P(1-P)}{n}$

وبذلك يكون توزيع النسبة في العينة هو:

$$\widehat{\mathrm{P}} \sim N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right)$$

أما التوزيع الطبيعي المعياري فيكون:

$$Z = \frac{\widehat{P} - P}{\sqrt{P(1-P)/n}} \sim N(0,1)$$

ملاحظات:

- حتى نتمكن من استخدام التقريب الطبيعي بشكل صحيح، يجب أن يكون كل من nP و $n(1-P)$ أكبر من 5.
- في حالة السحب بدون إرجاع نضرب تباين العينة في معامل التصحيح.
- في حالة مجهولية $\mathbf{P}$ نستبدلها بـ $\widehat{\mathbf{P}}$.