Cours de la théorie des graphes
Pour les étudiants de la troisième année Mathématiques appliquées
Département de mathématiques
Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila
Anné universitaire 2023/2024

Chapitre 1

Table des matières

1

Quelques classes de graphes

Dans cette section nous présentons les classes de graphes les plus utilisées.

1.1 Chaîne

Une *chaîne* P_n dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets x_1, x_2,. . ., x_n
telle que pour tout entier i, $1 \leq i \leq n-1$, e_i=$x_i x_{i+1} \in E$.
L'entier $n-1$ représente la *longueur* de P_n et les sommets x_1 et x_n sont appelés *extrémité initiale* et *extrémité finale* respectivement de la chaîne P_n.
Une chaîne est dite *élémentaire* si tous ses sommets sont distincts.
Une chaîne est dite simple si toutes ses arêtes sont distinctes.

Exemple 1.1 *Le graphe illustré dans FIG.1.1-(a) représente la chaîne simple élémentaire mais dans FIG.1.1-(b), la chaîne est simple mais non élémentaire.*

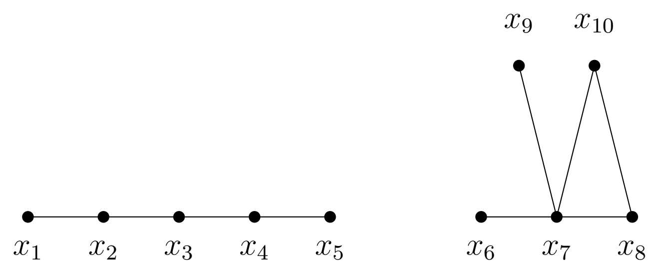

FIGURE 1.1 – (a) La chaîne x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 est simple et élémentaire-(b) La chaîne x_6, x_7, x_8, x_{10}, x_7, x_9 est simple mais non élémentaire

1.2 Corde

Une *corde* est une arête qui relie deux sommets non consécutifs dans une chaîne.
Une *chaîne minimale induite* par n sommets, notée par P_n, est une chaîne élémentaire sans corde.

1.3 Cycle

Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues.
Un *cycle élémentaire* C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts.

Le graphe illustré dans la figure FIG.1.2 représente le cycle d'ordre 5 $C_5 = x_1$, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1.

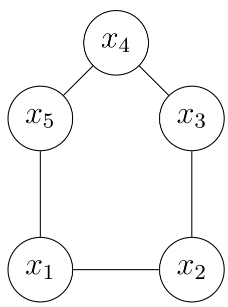

FIGURE 1.2 – Le cycle $C_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1\}$

1.4 Graphes eulériens

On appelle cycle eulérien d'un graphe G un cycle passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G. Un graphe est dit eulérien s'il possède un cycle eulérien. On appelle chaîne eulérienne d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes de G. Un graphe ne possédant que des chaînes eulériennes est semi- eulérien. Plus simplement, on peut dire qu'un graphe est eulérien (ou semi-eulérien) s'il est possible de dessiner le graphe sans lever le crayon et sans passer deux fois sur la même arête.

Théorème 1.1 *(Théorème d'Euler (1736)) Un graphe connexe est eulérien si et seulement si chacun de ses sommets est incident à un nombre pair d'arêtes.*

Si exactement deux sommets s et t sont incidents à un nombre impair d'arêtes, le graphe est dit semi-eulérien.

1.5 Graphes hamiltoniens

On appelle cycle hamiltonien d'un graphe G un cycle passant une et une seule fois par chacun des sommets de G. Un graphe est dit hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien. On appelle chaîne hamiltonienne d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacun des sommets de G. Un graphe ne possédant que des chaînes hamiltoniennes est semi-hamiltonien. Contrairement aux graphes eulériens, il n'existe pas de caractérisation simple des graphes (semi-)hamiltoniens. On peut énoncer quelques propriétés et conditions suffsantes :

— un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien ;
— – si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien ;
— – les graphes complets K_n sont hamiltoniens.

Théorème 1.2 *(Ore)*

Soit G un graphe simple d'ordre $n > 3$. Si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) > n$, alors G est hamiltonien.

Corollaire 1.1 *(Dirac) Soit G un graphe simple d'ordre $n > 3$. Si pour tout sommet x de G, on a $d(x) > \frac{n}{2}$, alors G est hamiltonien.*

1.6 Graphe complet

Un graphe simple est dit complet si toute paire de sommets de G est reliée par une arête.

Exemple 1.2 *Le graphe K_5 illustré dans FIG.1.3 est un graphe complet à 5 sommets.*

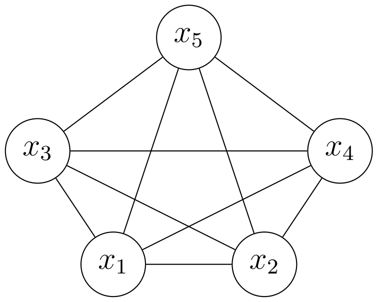

FIGURE 1.3 – Le graphe complet K_5

1.7 Graphe biparti

Un graphe est dit *biparti* s'il est possible de partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous ensembles V_1 et V_2 tels que les sous graphes induits par V_1 (resp.V_2) ne contient aucune arête.
Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle de longueur impair.
Un graphe est dit *biparti complet*, et est noté $K_{m,n}$, si $|V_1|{=}m$ et $|V_2|{=}n$ et tout sommet de V_1 est relié à tout sommet de V_2.

Exemple 1.3 *Le graphe illustré dans FIG.1.4 représente le graphe biparti complet $K_{3,2}$*

1.8 Arbre

Un arbre est un graphe connexe sans cycle.
D'autres définitions équivalentes sont possibles pour qu'un graphe G d'ordre n soit un arbre :

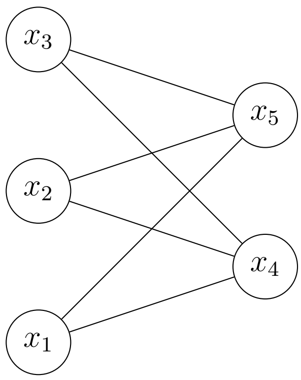

FIGURE 1.4 – Le graphe biparti complet $K_{3,2}$

- G est connexe et possède $n-1$ arêtes.
- G est sans cycle et possède $n-1$ arêtes.
- G est connexe et minimal pour cette propriété.
- G est sans cycle et maximal pour cette propriété.
- Entre toute paire de sommets, il existe une unique chaîne les reliant.

On distingue trois types de sommets dans un arbre :

- La racine.
- Les feuilles : ce sont les sommets de degré égal à 1.
- Les noeuds internes : ce sont les sommets de degré supérieur à 1.

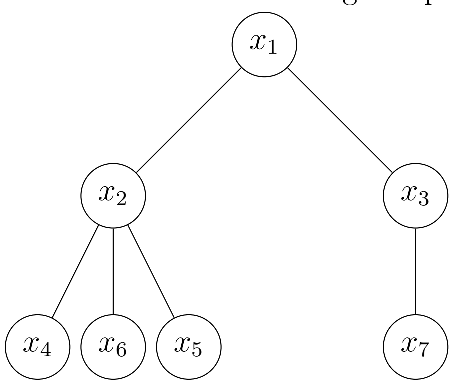

FIGURE 1.5 – Un arbre T où x_1 est sa racine, x_2 et x_3 sont des noeuds internes et x_4, x_5, x_6 et x_7 sont des feuilles.

1.8.1 Arbre n-aire complet

Pour tous entiers k $\geq$ 1 et t $\geq$ 2, on appelle arbre t-aire complet de profondeur k, le graphe $A_{k,t}$ défini inductivement comme suit :

- $A_{1,t}$ est le graphe biparti complet $K_{1,t}$.
- Pour k $\geq$ 2, $A_{k,t}$ est obtenu à partir de t copies disjointes de $A_{k-1,t}$ et d'un sommet relié par une arête à l'unique sommet de degré t de chacune des t copies de $A_{k-1,t}$.

L'unique sommet r de $A_{k,t}$ de degré t est la racine de $A_{k,t}$.
Soient k, $t \in \mathbf{N}^*$. Pour tout entier 0 $\leq$ i $\leq$ k, on définit le i^{eme} *niveau* de $A_{k,t}$ par $V_i(A_{k,t}) = \{u \in V(A_{k,t}), d(u,r) = i\}$. En particulier, $V_k(A_{k,t})$ est l'ensemble des sommets pendants de $A_{k,t}$.
Pour un sommet $v \in V_i(A_{k,t})$, on écrit $l(v) = i$ et on dit que i est la profondeur de v. Enfin, pour tout sommet $u \in V(A_{k,t})$, on note par $A_{k,t}(u)$ l'unique sous-arbre binaire complet de $A_{k,t}$ de racine u et de profondeur $k - l(v)$.
Si t = 2, $A_{k,2}$ est appelé arbre binaire de profondeur k.

1.8.2 Arbre binaire complet

un arbre binaire enraciné est un arbre binaire complet ssi chaque sommet d'arbre possède exactement deux fils sauf les feuilles .

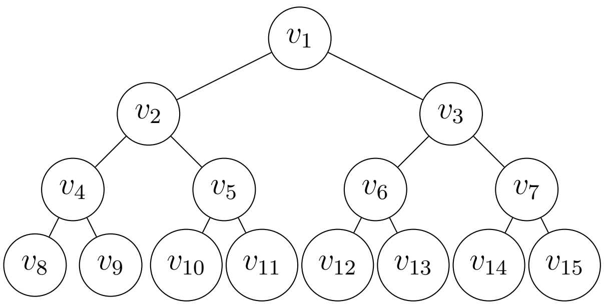

Figure 1.6 – Arbre binaire complet

Exercice 1.1 *Calculer le nombre de sommets d'un arbre binaire complet en fonction de son profondeur k.*

1.9 Forêt

est un graphe non connexe et sans cycle.

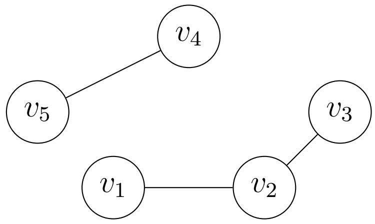

Figure 1.7 – Forêt

1.10 Graphe triangulé

Un graphe est dit triangulé si chacun de ses cycles de nombre d'arêtes A tel que $\mid A \mid \geq 4$ posséde une corde c'est à dire si chacun de ses cycles de G est d'ordre inférieure ou égale 3 .

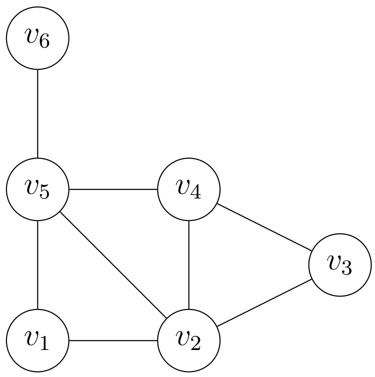

Figure 1.8 – Graphe triangulé

Exercice 1.2 *Chercher les différentes propriétés d'un graphe triangulé. Un travail à remettre sous forme d'un rapport.*

1.11 Clique et stable

Une clique K dans un graphe G est un ensemble de sommets deux à deux adjacents tel que $G[K]$ est un graphe complet.

Un stable S dans un graphe G est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents tel que $G[S]$ est un graphe sans arêtes. Le cardinal du plus grand stable est le nombre de stabilité de G, on le note $\alpha(G)$.

Figure 1.9 – (a) Un stable maximal et (b) Un stable maximum

Exercice 1.3 *Calculer le nombre de stabilité pour une chaine et un cycle d'ordre n.*

1.12 Complémentaire d'un graphe

Le complémentaire d'un graphe G est le graphe noté $\bar{G}$ défini par : $V_{\bar{G}} = V_G$ et l'arête $uv(u \neq v) \in E_{\bar{G}}$ si et seulement si $uv \notin E_G$.

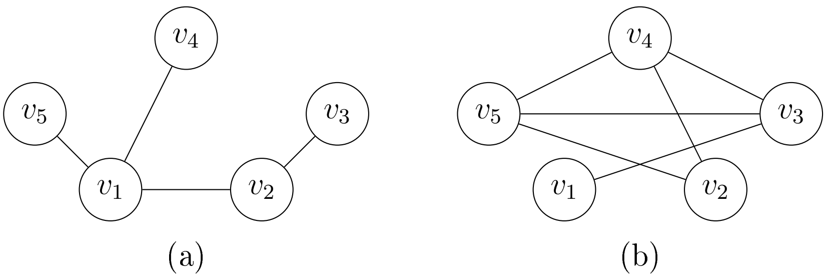

Figure 1.10 – Le Graphe (a) et son complémentaire (b)

1.13 Quelques paramètres d'un graphe :

1.13.1 Distance, Excentricité, Diamètre et Rayon d'un graphe

Distance entre deux sommets

La distance $d(u, v)$ entre deux sommets u et v d'un graphe G est le nombre d'arêtes dans une plus courte chaîne reliant u à v.

Excentricité d'un sommet

L'*excentricité* d'un sommet u dans un graphe G est la plus grande distance entre le sommet u et n'importe quel autre sommet v de G, c'est à dire $e(u) = \max_{v \in V}\{d(u, v)\}$.

Diamètre d'un graphe

Le *diamètre* du graphe G est la plus grande excentricité dans le graphe G, c'est à dire $diam(G) = \max_{u \in V} e(u)$.

Rayon d'un graphe

Le *rayon* du graphe G est l'excentricité minimum sur tous les sommets de G, c'est à dire $rad(G) = \min_{u \in V} e(u)$.

1.13.2 Le nombre chromatique

Le nombre chromtique d'un graphe G noté $\chi(G)$ est le nombre de couleurs à affecter aux sommets de G, de telle sorte que les sommets adjacents seront de couleurs différentes .

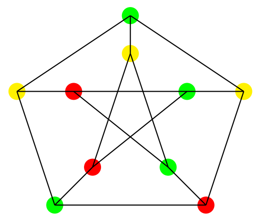

Figure 1.11 – Graphe de nombre chromatique $\chi(G) = 3$ et de nombre de stabilité $\alpha(G) = 4$

Exercice 1.4 *Reprenons le graphe dans la figure 1.6.*

1. *Calculer l'excentricité de chaque sommet.*
2. *Déduire la valeur du rayon et du Diamètre de ce graphe.*
3. *Calculer le nombre de stabilité et le nombre chromatique de ce graphe.*