

Exercice 1:

Montrer que:

$$\operatorname{Arcsin} x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]0, 1[;$$

$$\operatorname{Arctan} x > \frac{x}{1+x^2}, \quad \forall x > 0;$$

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in]-1, 1[;$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x > 0.$$

Exercice 2:

1. Les réels x et y étant liés par: $x = \ln \left(\tan \left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$.

- Calculer chx , shx et thx en fonction de y .

2. Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} (ch^3 x - sh^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(chx)).$$

Exercice 3:

En utilisant le développement de Maclaurin de la fonction $\ln(x+1)$, montrer que:

$$\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x.$$

Exercice 4:

En utilisant le développement de Taylor-Young, calcule la limite suivante:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - x + \frac{x^2}{4}}{(\sin x)^2}.$$

Exercice 5:

1) - Écrire la formule de Maclaurin avec le reste de Lagrange pour la fonction $f(x) = e^x$ à l'ordre n .

- Montrer que: $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e}{(n+1)!}$.

- En déduire la limite de la suite $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Exercice 6:

En utilisant la formule de Maclaurin pour la fonction $\ln(x+1)$. Calculer:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right).$$

Exercice 7:

Trouver la limite de la suite (u_n) définie par:

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 8:

Calculer les développements limités jusqu'à l'ordre n au voisinage de x_0 des fonctions suivantes:

- 1) $f(x) = x(\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}, \quad x_0 = 0, \quad n = 3.$
- 2) $f(x) = \ln(1 + \sin x), \quad x_0 = 0, \quad n = 3.$
- 3) $f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}, \quad x_0 = 0, \quad n = 4.$
- 4) $f(x) = \cos(\sin x); \quad x_0 = 0, \quad n = 4.$
- 5) $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}, \quad x_0 = 0, \quad n = 4.$
- 6) $f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 4.$
- 7) $f(x) = \frac{1 + 2x + x^3}{x^3 + x^5}, \quad x_0 = 0, \quad n = 2.$
- 8) $f(x) = \exp(\sqrt{x}), \quad x_0 = 1, \quad n = 3.$
- 9) $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x - 1}, \quad x_0 = +\infty, \quad n = 3.$

Exercice 9:

Soient f et g deux fonctions qui admettent des développements limités au voisinage de zéro donnés par:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

- Calculer le développement limité jusqu'à l'ordre 4 au voisinage de zéro de la fonction $g \circ f$.

- En déduire la limite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g \circ f(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}.$

Exercice 10:

Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} \sin 3x}{\operatorname{sh}(-2x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$