TD 1 : Mots, Langages & Grammaires

Exercice 1

I. Soit le mot $x = ((acbc)^R.baca)^R$ (α^R désigne le reflet miroir de α)
1) Donner la chaîne de caractères à laquelle x est égal.
2) Quelle est la valeur de $|x|$, $|x|_a$, $|x|_b$ et $|x|_c$?
3) Donner un préfixe propre de x contenant au moins deux lettres ‘c’.

II. Soit l’alphabet A={a,b}
1. Etant donnés les mots u=aa et v=bab, écrire les mots uv, $(uv)^2$ et u^3v.
2. Enoncer tous les mots de longueur 2 définis sur A.
3. Soient les ensembles

$E1 = \{uv/ u\in A^+;v\in A^+\}$

$E2 = \{uv/ u\in A^+;v\in A^*\}$

$E3 = \{uv/ u\in A^*;v\in A^*\}$

A quoi correspondent ces ensembles ?

Exercice 2

a) Quel est le nombre de facteurs distincts de longueur 3, 4 et 5 des mots suivants de longueur 20

f = abaababaabaababaabab

g = aaababbbbaabbabaaaab

b) Donner tous les facteurs du mot abbbaaa.
c) Donner la liste des préfixes de abbaa.
d) Donner la liste des suffixes de abcd.
e) Combien de préfixes a un mot de longueur n ?
f) Combien de facteurs (distincts) possède le mot a^n ?
g) Combien de facteurs (distincts) possède le mot a^mb^n ?

Exercice 3

Décrire LM dans les cas suivants :

1. L={a,bb,ccc} et M={d ,ee,fff} ,
2. L= M={ε,a,aa} ,
3. L={a,b}* et M=∅ ,
4. L={aa} et M={a,b}* ,
5. L={aa,aaa} et M={a,b}* ,
6. L={ε,a,aa,aaa} et M={a,b}* ,

Exercice 4

Trouver les langages : $L_2.L_3$, $L_2.L_1$, $L_1.L_3$, $L_5 \cap L_1$, $L_6 \cup L_5$, $L_1.(L_2 \cap L_4)$, $L_1.(L_2 \cap L_3)$, $(L_1.L_2)^R$, $(L_1)^R.(L_2)^R$ pour les langages formels suivants :

$L_1 = \{a^i b^j , i \geq j \geq 1\}$
$L_2 = \{a, aa, \varepsilon \}$
$L_3 = \{b, ba\}$

$L_4 = \{\varepsilon\}$
$L_5 = \{a^i b^i c^k \ / \ i , k \geq 0\}$
$L6 = \{ a^i b^i \ / \ i \geq 1\}$

Exercice 5

Donner le type de G et déterminer L(G) dans les grammaires suivantes :

1) G_1 : $S \to a \mid b \mid aSb$
2) G_2 : $S \to \varepsilon \mid bBa$, $Ba \to baT$, $baT \to baaS$
3) G_3 : $S \to aSa \mid bSb \mid U$, $U \to 0U \mid \varepsilon$
4) G_4 : $S \to aU \mid c$, $U \to Sb \mid d$
5) G_5 : $S \to aA \mid bB$; $A \to a \mid ab$; $B \to b \mid cb$
6) G_6: $S \to bA$; $A \to aA \mid \varepsilon$
7) G_7 : $S \to aSc \mid A$, $A \to bA \mid b$
8) G_8 : $S \to aSbS \mid \varepsilon$
9) G_9 : $S \to aRbc \mid abc$, $R \to aRTb \mid aTb$; $Tb \to bT$; $Tc \to cc$
10) G_{10} : $S \to aAb \mid \varepsilon$, $A \to aSb$, $Ab \to \varepsilon$

Exercice6

Pour chacun des langages suivants, donner des exemples de mots contenus dans chacun des langages, et les grammaires qui les engendrent :

$L_1=\{w\in A^* \mid 2|w|_a = |w|_b\}$
$L_2=\{a^{2n}b^{3n} \mid n\geq 2\}$
$L_3=\{ab^na \mid n \in N\}$
$L_4 = \{m\in\{a,b\}^*\}$
$L_5 = \{m\in\{a,b\}^* | m = xaaa \text{ avec } x \in\{a,b\}^*\}$
$L_6 = \{a^nb^n \mid n\geq 0\}$
$L_7 = \{mm^R \mid m\in\{a,b\}^*\}$(langage miroir)
$L_8 = \{ a^nb^nc^p \mid n >0, p>0\}$
$L_9 = \{ a^pb^qc^r \mid p=q \text{ ou } q=r, q>0, r >0, p>0\}$

Exercice 7

Soient $V_1=\{a,b\}$ et $V_2=\{c,d\}$.

1. Donner une grammaire de type 3 générant V_1^+
2. Donner une grammaire de type 3 générant V_2^*
3. En déduire une grammaire de type 3 permettant de générer $V_1^+ V_2^*$

Exercice 8

On considère la grammaire G=(V,N,S,R) tel que :

V={a,b}, N={S,T,U}, R={S→TU, T→ST/ a, U→ US/ b}

1. Quel est le type de G, justifier.
2. Les mots a, ababa, ababab, ba sont ils dérivés par la grammaire G ?
3. Montrer que G est ambiguë.
4. Déterminer le langage engendre par G.

Exercice 9

Déterminer le type de G ainsi que son langage genere L(G) :

G = ({a,b,c},{S,A}), S, {S → aSc / A, A→bA / b })