Centre universitaire Abdelhafid Boussouf- Mila

Deuxième Année LMD Mathématiques Matière : Analyse 04

Responsable de la matière : Dr. Smail KAOUACHE

Solutions des exercices

Solution de l'exercice n°1 Calculons (lorsqu'elles existent) la limite de f, quand $(x,y) \to 0_{\mathbb{R}^2}$

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. On a $f(0,y) = -1 \neq 1 = f(x,0) \Rightarrow \lim_{(x,y)\to 0_{\mathbb{R}^2}} f(x,y)$ n'existe pas.

2. $|f(x,y)| = \left|\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \to 0$, quand $(x,y) \to 0_{\mathbb{R}^2}$, donc $\lim_{(x,y)\to 0_{\mathbb{R}^2}} f(x,y) = 0$.

3. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x)\sin(y)}{\tan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)} = \left(\dfrac{\dfrac{\sin(x)}{x} \times \dfrac{\sin(y)}{y}}{\dfrac{\tan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}}\right) \times \left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \to 0$, quand $(x,y) \to 0_{\mathbb{R}^2}$.

4. $|f(x,y)| = \left|\dfrac{\sin(x^2)\sin(y)}{x^2+\sinh^2(y^2)}\right| \leq \left|\dfrac{x^2|y|}{x^2}\right| \leq |y| \to 0$, quand $(x,y) \to 0_{\mathbb{R}^2}$, donc $\lim_{(x,y)\to 0_{\mathbb{R}^2}} f(x,y) = 0$.

Solution de l'exercice n°2

I) Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sin(x^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sin(x)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Les fonctions f et g sont-elles différentiabes en $(0,0)$?.

1. $\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \end{cases}$

$L_1(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = 0$, donc $\dfrac{|f(x,y)-f(0,0)-L_1 x,y)|}{||(x,y)||} \overset{V(y,0)}{\simeq} \left|\dfrac{y^2x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2} \to 0$, quand $(x,y) \to (0,0)$.

Alors, f est différentiable en $(0,0)$.

2. De même : $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{g(0,t)-g(0,0)}{t} = 0 \end{cases}$

$L_2(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)x + \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)y = 0$, donc $\dfrac{|g(x,y)-g(0,0)-L_2 x,y)|}{||(x,y)||} = \dfrac{y^2\sin(x)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = G(x,y)$. On a $G(x,x) = \dfrac{x^2\sin(x)}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} \overset{V(0)}{\simeq} \dfrac{x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{(2)^{\frac{3}{2}}} \nrightarrow 0$. Alors, g n'est pas différentiable en $(0,0)$.

II) Trouvons de deux méthodes différentes, le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de $(0,0)$, telle que :

$$f(x,y) = \cos(x)\exp(y).$$

<u>Première méthode</u> : Il est claire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1$, on a alors

$$f(x,y) = \cos(x)\exp y = 1 + y - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + (x^2+y^2)\epsilon(x,y),$$

avec $\epsilon(x,y) \to 0$, quand $(x,y) \to (0,o)$.
<u>Deuxième méthode :</u>

$$f(x,y) = \cos(x)\exp y = \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)\right)\ \left(1 + y + \frac{y^2}{2} + y^2\epsilon(y)\right)\ .$$

On fait le produit, et en conservant uniquement les termes en x, y, xy, x^2, y^2 et en englobant tout le reste de la forme $(x^2+y^2)\epsilon(x,y)$, on obtient le même résultat.
III) *$\det J_\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha\cos(\alpha y) \\ -\alpha\cos(\alpha y) & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha^2\cos(\alpha x)\cos(\alpha y) \geq 1 - \alpha^2 > 0$.i.e. J_φ est inversible au point (x,y).
* φ est de classe C^∞ (évident).
* φ est injective ?
Soient (x_1,y_1) et $(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_1,y_1) = \varphi(x_2,y_2)$. Alors
$\begin{cases} x_1 - \sin(\alpha y_1) = x_2 - \sin(\alpha y_2) \\ y_1 - \sin(\alpha x_1) = y_2 - \sin(\alpha x_2) \end{cases} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| \overset{TAF}{\leq \alpha} |y_1 - y_2| \leq \overset{TAF}{\alpha^2}\ |x_1 - x_2|\ .$
Puisque $1 - \alpha^2 > 0$, on a alors $x_1 = x_2$. Ce qui entraîne à son tour $y_1 = y_2$.
D'aprés le théorème d'inversion globale, φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$.

<u>Solution de l'exercice n°3</u>

1. φ est injective et est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (évident). De plus
$u = x - y$ et $v = x + y \Rightarrow \det j_\varphi(x,y) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, i.e j_φ est inversible.
D'après le théorème d'inversion globale, φ est un $C^{+\infty}$ difféomorphisme.
2. Nous avons $f = g \circ \varphi$. On trouve
$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.C'est-à-dire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{cases}.$$

Donc $\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x,y) &= \left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)\\ &= \frac{\partial^2 g}{(\partial u)^2}(u,v)+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)+\frac{\partial^2 g}{(\partial v)^2}(u,v)\\ \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x,y) &= \left(-\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)\\ &= \frac{\partial^2 g}{(\partial u)^2}(u,v)-2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)+\frac{\partial^2 g}{(\partial v)^2}(u,v)\end{aligned}\right.$.

3. L'équation : $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x,y)=4(x^2-y^2)$ devient alors : $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)=uv$.
4. En intégrant l'équation précédente on trouve $g(u,v)=\frac{1}{4}u^2v^2+F(u)+H(v))$,
où F, H sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Par suite $f(x,y)=g(u,v)=\frac{1}{4}(x^2-y^2)^2+F(x-y)+H(x+y)$.

(Extrema)

Solution de l'exercice n°1

1) a. Soit $f: R^2 \to R$ la fonction définie par $f(x,y)=x^2+2\exp(y)+\sin(xy)-2$.
Alors, pour tout $(x,y)\in R^2$: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2\exp(y)+x\cos(xy)$.
Ainsi, puisque $f(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=2\neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\varphi:]-\sigma,\sigma[\to\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0)=0$ et pour tout $x\in]-\sigma,\sigma[$: $f(x,\varphi(x))=0$, de plus $\varphi\in C^\infty$.

b-Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y\cos(xy)$. Par conséquent $\dot\varphi(0)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}=0$.

Autrement dit 0 est un point stationnaire de φ.

Nature du point stationnaire de φ. Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\ddot\varphi(0)=-\frac{\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0,\varphi(0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,\varphi(0))}=-1<0$,

la fonction φ admet alors un maximum local en $(0,0)$.
2) a. Soit $f: R^3\to R$ la fonction définie par $f(x,y,z)=3x^2+6y^2+z^5-2z^4+1$.
Alors, pour tout $(x,y,z)\in R^3$: $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=5z^4-8z^3$.
Ainsi, puisque $f(0,0,1)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1)=-3\neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\varphi: B((0,0),\sigma)\to R$ telle que $\varphi(0,0)=1$ et pour tout $(x,y)\in B((0,0),\sigma)$: $f(x,y,\varphi(x,y))=0$, de plus $\varphi\in C^\infty$.
b-Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=6x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=12y$.

Par conséquent $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) = 0$. Autrement dit $(0,0)$ est un point stationnaire de φ.
Nature du point stationnaire de φ. Puisque pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:
$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0,0,1) = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,1) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(0,0,1) = 12$, on a donc $A = 2, B = 0$ et $C = 4$ ou encore $B^2 - AC = -8 < 0$ et $A = 2 > 0$; ce qui entraîne que la fonction φ admet un minimum local en $(0,0)$.

$\boxed{\textbf{(Intégrales multiples)}}$

<u>Solution de l'exercice n°1</u>

1.

$$\begin{aligned}\iint_A y\frac{\exp(2x+y^2)}{1+\exp(x)}dxdy &= \left(\int_0^1 \frac{\exp(2x)}{1+\exp(x)}dx\right)\times\left(\int_0^2 y\exp(y^2)dy\right)\\ &= \left(\int_1^e \frac{z}{1+z}dz\right)\times\left(\int_0^2 y\exp(y^2)dy\right)\\ &= [z-\ln(1+z)]_1^e\times\left[\frac{\exp(y^2)}{2}\right]_0^2 = \left(e-1+\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)\right)\times\left(\frac{\exp(4)-1}{2}\right).\end{aligned}$$

2. $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>1, y>1, x+y<3\}$ peut se réécrire sous la forme :

$$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1<x<2, 1<y<3-x\right\}\ \text{(FIGURE 1).}$$

Alors

$$\begin{aligned}\iint_B \frac{dxdy}{(x+y)^3} &= \int_1^2 dx\int_1^{3-x}\frac{dy}{(x+y)^3} = \frac{-1}{2}\int_1^2\left[\frac{1}{(x+y)^2}\right]_1^{3-x}dx\\ &= \frac{-1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{9}x+\frac{1}{x+1}\right]_1^2 = \frac{1}{36}\end{aligned}$$

<u>Solution de l'exercice n°2</u>

1. L'intégrale généralisée de Gauss $J_1=\int_0^\infty \exp(-x^2)dx$ est convergente.

Posons $J_1^a=\int_0^a \exp(-x^2)dx$

Donc $(J_1^a)^2=\int_0^a \exp(-x^2)dx\times\int_0^a \exp(-y^2)dy=\iint_{[0,a]^2}\exp(-(x^2+y^2))dxdy.$

Posons $x=\rho\cos(\theta)$ et $y=\rho\sin(\theta)$. Alors $(\rho,\theta)\in\left[0,\sqrt{2}a\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Par suite $(J_1^a)^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\rho\exp(-\rho^2)d\rho=\frac{-\pi}{4}\left[\exp(-\rho^2)\right]_0^{\sqrt{2}a}$.

Ce qui implique $(J_1)^2=\frac{\pi}{4}$, et puisque $\exp(-x^2)>0$, pour tout x, on a alors

$$J_1=\int_0^\infty \exp(-x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<y<2x,\ xy<4,\ x^2+y^2>4\}$ peut se réécrire sous la forme :

$$D=D_1\cup D_2 \text{ (FIGURE 1)},$$

où

$$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{2}{\sqrt{5}}<x<\sqrt{2} \text{ et } \sqrt{4-x^2}<y<2x\right\},$$

et

$$D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{2}<x<2 \text{ et } x<y<\frac{4}{x}\right\}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D} x^2ydxdy &= \iint\limits_{D_1} x^2ydxdy+\iint\limits_{D_2} x^2ydxdy=\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{2}} x^2\left(\int\limits_{\sqrt{4-x^2}}^{2x} ydy\right)dx+\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} x^2\left(\int\limits_{x}^{\frac{4}{x}} ydy\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{2}}\left(5x^4-4x^2\right)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\left(16-x^4\right)dx+\\ &= \frac{1}{2}\left[x^5-\frac{4}{6}x^3\right]_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\left[16x-\frac{1}{5}x^5\right]_{\sqrt{2}}^{2}=-\frac{104}{5}\sqrt{2}+\frac{32}{375}\sqrt{5}+\frac{64}{5}.\end{aligned}$$

3) Soit $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<4\}$. Calculons $J_3=\iint\limits_{E}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)}dxdy.$

On pose $x=\rho\cos\theta$ et $y=\rho\sin\theta$. Donc $\rho\in[1,2]$ et $\theta\in[0,2\pi]$. On a alors

$$J_3=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_1^2\frac{\rho\cos(\rho^2)d\rho}{2+\sin(\rho^2)}\right)d\theta=\pi\left[\ln\left(2+\sin(\rho^2)\right)\right]_1^2=\pi\ln\left(\frac{2+\sin(4)}{2+\sin(1)}\right).$$

4) Soit $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ x+y>1\}$. Calculons $J_4=\iint\limits_{F}\dfrac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$..

On pose $x=\rho\cos\theta$ et $y=\rho\sin\theta$. Donc $\rho\in\left[\dfrac{1}{\cos(\theta)+\sin(\theta)},1\right]$ et $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ (FIGURE 1). On a alors

$$\begin{aligned}J_4 &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{\frac{1}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}}^{1}\frac{d\rho}{\rho^3}\right)d\theta=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\cos(\theta)+\sin(\theta)\right)^2-1\right)d\theta\\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\theta)\,d\theta=-\frac{1}{4}\left[\cos(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

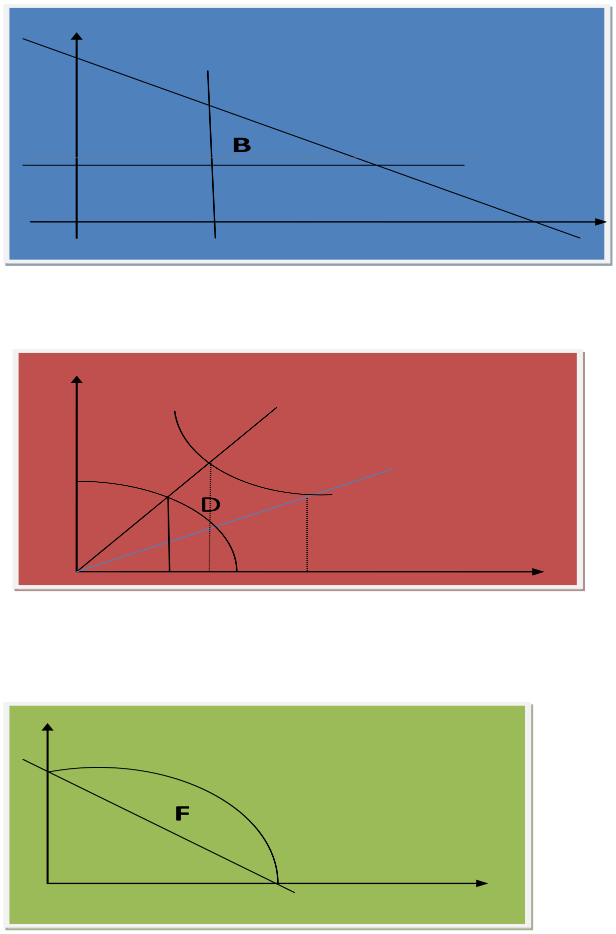

Figure 1 –