Centre universitaire Abdelhafid Boussouf- Mila

Deuxième Année LMD Mathématiques Matière : Analyse 04

Responsable de la matière : Dr. Smail KAOUACHE

TD 1 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice n°1 Calculer (lorsqu'elles existent) les limites suivantes

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, 2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x)\sin(y)}{\tan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$,

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2)\sin(y)}{x^2+\sinh^2(y^2)}$, 5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^x$, 6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+|x|)-y}{x-\ln(1+|y|)}$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+|xy|^\alpha)}{x^2+y^2}$, $\alpha \geq 1$.

Exercice n°2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$. Démontrer que g est classe C^1 et calculer la première dérivéé de g en fonction des dérivvées partielles de f.

2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$. Démontrer que h est de classe C^1 et exprimer les dérivées partielles premières de h en fonction de celles de f.

Exercice n°3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. f est -elle continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. f est -elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer de deux méthodes différrentes la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Conclure.

Exercice n°4

1. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sin(x^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sin(x)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Les fonctions f et g sont-elles différentiabes en $(0,0)$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :$f(x,y) = \cos(x)\exp(y)$.

   2.1. Calculer le gradient de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2.2. Ecrire la différentielle de f au point $(0,0)$.

2.3. Calculer la hessienne de f au point $(0,0)$.

2.4. Trouver de deux méthodes différentes, le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de $(0,0)$.

3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\varphi(x,y) = (x - \sin(\alpha y),\ y - \sin(\alpha x)),\ \ \alpha \in \left]-1,1\right[.$$

La fonction φ est-elle un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$?

Exercice n°5

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $\varphi(x,y) = (u = x - y, v = x + y)$. On suppose g de classe C^2. Soit $f = g \circ \varphi$.

1) Montrer que φ détermine un C^2-difféomorphisme .

2) Exprimer les dérivées partielles secondes de f en fonction de celle de g.

3) Montrer que si f est solution de l'E.D.P :

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x,y) = 4(x^2 - y^2), \tag{1}$$

alors g est solution de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x,y) - uv = 0$

4) En déduire la solution générale de (1)

Exercice n°6

1) a. Montrer que l'équation $x^2 + 2\exp(y) + \sin(xy) - 2 = 0$ définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 0$.

b. Montrer que φ admet un maximum local en 0.

2) a. Montrer que l'équation $3x^2 + 6y^2 + z^5 - 2z^4 + 1 = 0$ définit au voisinage du point $(0,0)$ une fonction implicite $z = \varphi(x,y)$ telle que $\varphi(0,0) = 1$.

b. Vérivier que $(0,0)$ est un point stationnaire de φ. Etudier sa nature.

Exercice n°7

Trouver les points stationnires des fonctions suivantes et étudier leurs natures :

1. $f(x,y) = x + y^2 - \sinh(x+y)$.
2. $g(x,y) = x + y - \sinh(x+y)$

Exercice n°8

Trouver les extrema de la fonction $g(x,y) = x + y - \sinh(x+y)$, où $(x,y) \in \overline{B((0,0),1)}$.