Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf-Mila
Institut: Mathématiques et Informatique
Département: Mathématiques
L3 Mathématiques/ S6/ 2023-2024
Matière: **Introduction à la théorie des opérateurs linéaires**

Serie 1: L'espace L(X,Y)
PartieII

Exercice1 Dans l'espace ℓ_2 des suites $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ telles que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$, on considère l'opérateur linéaire

$$P_n : \ell_2 \underset{x \to y = P_n x}{\longrightarrow} \ell_2$$

défini par: $\begin{cases} y_i = & x_i, \; i = 1, 2, ..., n \\ y_i = & 0, \qquad\qquad i > n \end{cases}$

1- Montrer que P_n converge fortement.
2- Montrer que P_n ne converge pas uniformément.

Exercice2 $E = C([0,1]$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs complexes. On considère les deux espaces normés $X = (E, \|\|_\infty)$ et $Y = (E, \|\|_1)$ où $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)dt|$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. On désigne par I l'application identité de X dans Y.
1)Montrer que I est bijective. Quelle est sa norme?
2)Montrer que I^{-1} n'est pas continue (on pourra utiliser la suite $f_n(t) = t^n$)
3)En déduire que Y n'est pas complet.

Exercice3 Soit H un espace de Hilbert et soit $T : H \to H$ une application linéaire. On suppose que: $\langle Tx, x\rangle \geq 0, \quad \forall x \in H$. Soit z_n une suite de points de H convergeant vers 0. On suppose que la suite $(Tz_n)_{n\geq 1}$converge vers un point $\ell \in H$.

1a Vérifier que: $\|T(z_n + h)\| < \infty$ et que $\|\langle T(z_n + h), z_n\rangle\| \to 0$,

b Déduire que: $\langle \ell, h\rangle + \langle Th, h\rangle \geq 0 \;\; \forall h \in H$

2 Montrer que: $\epsilon \langle \ell, h\rangle + \epsilon^2 \langle Th, h\rangle \geq 0 \qquad \forall h \in H, \epsilon > 0$

et que, $\langle \ell, h\rangle \geq 0, \quad \forall h \in H$

a Montrer que: $-\langle \ell, h\rangle + \epsilon^2 \langle Th, h\rangle \geq 0 \;\; \forall h \in H$

et que, $-\langle \ell, h\rangle \geq 0, \quad \forall h \in H$. Déduire ℓ.

b Montrer que le graphe de T est fermé. Que peut-on en déduire?

Exercice4 1- Soit $y \in \mathcal{C}[0,1]$. Calculer $\lim\limits_{t\to 0} y(t)$.
Soit $A : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ l'opérateur défini par: $Ax(t) = \frac{x(t)}{t}$ tel que

$$D(A) = [x \in \mathcal{C}[0,1] : \lim_{t\to 0} \frac{x(t)}{t} existe\}$$

2- Montrer que A est fermé.

Exercice5 Soit $C^1([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continûment dérivables sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \underset{x\in[0,1]}{Sup} |f(x)|$
Soit: $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ l'application linéaire définie par $D(f) = f'$.

1. Montrer que D n'est pas continue.
2. Montrer que le graphe de D est fermé.
3. Pourquoi cela ne contredit pas le théorème du graphe fermé?

Exercice6 $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach. Soit $f : E \to F$ une application telle que

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in]-\infty, -1] \\ 0 & \text{si } \ x \in]-1, 1[\\ x-1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Supposons que $(E, \|.\|_E) = (F, \|.\|_F) = (\mathbb{R}, |.|)$.
1- vérifier que f est continue et surjective.
2- Est-ce- que f est ouverte?
3- Pourquoi ne peut-on- pas appliquer le théorème de l'application ouverte?

Exercice 7* Soient E et F deux espaces réels de Banach. $T \in \mathcal{L}(E, F)$

$$T : (E, \|\|_1) \to (F, \|\|_2)$$

On suppose que $R(T)$ est fermé et que $dim N(T) < \infty$. On considère sur E une autre norme$\|\|$, plus faible que la norme $\|\|_E$, i,e;

$$|x| \leq \lambda \|\|_E, \ \forall x \in E.$$

- Montrer qu'il existe une constante c telle que:

$$\|x\|_E \leq c(\|Tx\|_F + |x|), \forall x \in E$$

(On pourra raisonner par l'absurde)

Exercice8 E un espace de Banach. G et L deux sous-espaces fermés de E tels que $G+L$ soit fermé.
Montrer que: $\exists c>0 : \forall z \in G+L,\ z$ admet la décomposition suivante:

$$z = x + y\,, \quad x \in G \text{ et } \quad y \in L$$

tel que:

$$\|y\| \leq c\,\|z\| \qquad \text{et} \qquad \|x\| \leq c\,\|z\|\,,$$

sachant que $T : (G \times L, \|\|_{G\times L}) \to (G+L, \|\|_E)$ tel que $T(x,y) = x+y$ est un opérateur linéaire continu et surjectif.
- Montrer qu'il existe $c \geq 0$, tel que:$d(x, G\cap L) \leq c\,[(d(x,G) + d(x,L)]$

Exercice9* Soit A un opérateur linéaire non borné. $A : D(A) \subset E \to F$, avec $\overline{D(A)} = E$. Montrer que:
a) $\aleph(A^*) = R(A)^{\perp}$
b)$\aleph(A) \subset R(A^*)^{\perp}$ et que l'on a égalité si A est fermé.
N.B. Les exercices* sont laissés à l'étudiant.