

Serie 1: L'espace $L(X, Y)$
 Partie I

Exercice1

Soit $(\omega_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite de nombres complexes. On définit sur ℓ_2 , un opérateur D_ω par:

$$\begin{aligned} D_\omega & : \quad \ell_2 \longrightarrow \ell_2 \\ x = (x_1, x_2, \dots) & \longmapsto D_\omega x = (\omega_1 x_1, \omega_2 x_2, \dots) \end{aligned}$$

1- Prouver que D_ω est borné si et seulement si $(\omega_j x_j)_{j=1}^{\infty}$ est bornée et dans ce cas

$$\|D_\omega\| = \sup_j |\omega_j|.$$

2- Supposons que, $\sup_j |\omega_j| < \infty$. et que D_ω^{-1} est inversible.

a- Donner une expression de D_ω^{-1} . Calculer $\|D_\omega^{-1} e_j\|$, où e_j est un vecteur de la base hilbertienne de ℓ_2 .

b- Prouver que D_ω est inversible si et seulement si $\inf_j |\omega_j| > 0$.

Exercice2 Soient V et W deux espaces de Hilbert, soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$. et soit $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$ l'adjoint de T .

Montrer que l'image de la suite qui converge faiblement dans V est une suite faiblement convergente dans W .

Exercice3 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de scalaires ayant la propriété:

$$\forall (x_n) \in C_0 : (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_0$$

où $C_0 = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{k}; \lim_n x_n = 0 \right\}$, muni de la norme $\|x\| = \sup_n |x_n|$. On définit T_n tel que:

$$\begin{aligned} T_n & : \quad C_0 \rightarrow C_0 \\ (x_n) & \longmapsto T_n(x_n) = (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, \dots, a_n x_n, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

et T tel que:

$$\begin{aligned} T & : \quad C_0 \rightarrow C_0 \\ (x_n) & \longmapsto T(x_n) = (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, \dots, a_n x_n, \dots) \end{aligned}$$

1- Montrer que l'application T_n est linéaire et continue.

- 2- Calculer $\|T_n\|$, puis $\|T_n x_n - T x_n\|$
- 3- Montrer que $T_n x_n \rightarrow T x_n$, et déduire que la suite $\{\|T_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
- 4- Sachant que,

$$\ell_\infty = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{K} : \sup_n |x_n| < \infty \right\},$$

- Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$.

Exercice4 On considère les opérateurs linéaires bornés :

$$\begin{aligned} A_n & : && \ell_2 \rightarrow \ell_2, \\ x & = (x_1, x_2, x_3, \dots) \longrightarrow A_n(x) = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{2n}, \frac{x_3}{3n}, \dots \right) \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} B_n & : && \ell_2 \rightarrow \ell_2 \\ x & = (x_1, x_2, x_3, \dots) \longrightarrow B_n(x) = (0, 0, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

- 1- Calculer $\|A_n x\|$, et prouver que $\|A_n\| \rightarrow 0$.
- 2- On pose $S = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} S - \|B_n(x)\|^2$, et déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x)$, $\forall x \in \ell_2$.
- 3- Calculer la norme de B_n , et vérifier que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 pour la norme d'opérateurs.

Exercice5* Soit G un espace de Banach, $B' \subset G'$. Supposons que:

$$\forall x \in G, \quad \langle B', x \rangle = \bigcup_{f \in B'} \langle f, x \rangle$$

est borné dans \mathbb{R} . On pose $\{T_b\}_{b \in B'}$ la suite d'opérateurs tels que:

$$T_b : B' \subset G' \xrightarrow{x \mapsto \langle b, x \rangle} \mathbb{R}, \quad b \in B'$$

- 1- Montrer que $\|T_b\|$ est bornée.
- 2- Déduire que B' est borné.

N.B. Les **exercices*** sont laissés à l'étudiant.