Abdelhafid Boussouf University Center- Mila
Institute of Sciences and Technology
Module: Analysis 1
January 2024

Academic Year: 2023/2024
First Year Engineering
Semester 1
Duration: 90 minutes

الإمتحان النهائي: التحليل 1
Final exam: Analysis 1

Exercise 1: (5 points)

Let $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \} = \{\frac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots\}$.

لتكن $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \} = \{\frac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots\}$

1) Show that E is a non-empty, bounded set.

1) بين أن E مجموعة غير خالية محدودة.

2) Show that $\sup(E) = \max(E) = 1$.

2) بين أن $\sup(E) = \max(E) = 1$.

3) Show that $\inf(E) = 0$.

3) بين أن $\inf(E) = 0$.

4) Show that $\min(E)$ does not exist.

4) بين أن $\min(E)$ غير موجود.

Exercise 2: (8 points)

The sequence (u_n) is defined by: $u_0 = 0$ and for any integer n, $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$.

المتتالية (u_n) معرفة n ، بـ: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد صحيح n ، $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$.

1) Prove by induction that: (برهن بالتراجع أنه)

   (a) for all n, $u_n \geq 0$;

   * من أجل كل n ، $u_n \geq 0$ ؛

   (b) for all n, $u_n < 1$.

   * من أجل كل n ، $u_n < 1$.

2) Demonstrate that the sequence (u_n) is monotonic and convergent.

2) برهن أن المتتالية (u_n) رتيبة و متقاربة.

3) The sequence (v_n) is defined for any integer n as $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$. Demonstrate that (v_n) is a geometric sequence. Specify the common ratio and the first term.

3) المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد صحيح n بـ $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$. برهن أن (v_n) متتالية هندسية. حدد أساسها و حدها الأول.

4) Express v_n and u_n as functions of n and find $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) عبر عن v_n و u_n بدلالة n و أوجد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercise 3: (4 points)

Let

لتكن

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Using the definitions, show whether $f(x)$:

باستعمال التعريفات، بين إذا ما كانت $f(x)$:

1) is continuous at $x = 0$.

1) مستمرة عند $x = 0$.

2) has a derivative at $x = 0$.

2) لديها مشتقة عند $x = 0$.

Exercise 4: (3 points)

1. The speed v of waves in shallow water is given by:

1. السرعة v لأمواج في المياه الضحلة تعطى بـ

$$v^2 = 1.8L \tanh \frac{6.3d}{L}$$

where d is the depth and L the wavelength. If $d = 30$ and $L = 270$, calculate the value of v.

حيث d هو عمق الماء و L هو طول الموجة. إذا كان $d = 30$ و $L = 270$ ، أحسب قيمة v .

2. The functions

2. الدالتان

$$f_1(x) = \tanh x, \quad f_2(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

are two different forms of activating functions representing the output of a neuron in a typical neural network. show that $f_1(x) - 2f(2x) = -1$.

هما شكلان مختلفان من دوال التنشيط تمثلان مخرج عصبون في شبكة عصبية نموذجية خاصة بالذكاء الإصطناعي.

بين أن $f_1(x) - 2f_2(2x) = -1$.

.....**Good luck**

بالتوفيق.