تصحيح الإمتحان النهائي في مقياس التحليل 1 :

التمرين 01 : (5 نقاط)

1) لدينا : $E=\{\frac{1}{n}, n=1,2,...\}$:

من أجل كل n : $n\geq 1$ أي أن : $\frac{1}{n}\leq 1$: 0,5

أي أن 1 هو حد علوي لـ E :

من جهة أخرى لدينا : $n\geq 1$ أي أن $\frac{1}{n}>0$ ومنه : 0,5

0 حد سفلي لـ E.

* E لديها حد سفلي وحد علوي إذن هي محدودة
* E غير خالية لأن $\frac{1}{2}\in E$ 0,5

2) نستعمل مميزة الـ sup لنبرهن أنه يوجد $x_0\in E$ بحيث : 0,5

$$x_0>1-\varepsilon$$

بما أن $\varepsilon>0$ فإن $-\varepsilon<0 \Leftrightarrow 1-\varepsilon<1$

يمكن أن نأخذ $x_0=1$.

بما أن $1\in E$ فإن : $1=\sup(E)=\max(E)$ 1

3) $\inf(E)\overset{?}{=}0$:

نأخذ $\varepsilon>0$ كيفي ونحاول أن نجد $x_0\in E$ بحيث : $x_0<0+\varepsilon$ 1

نأخذ $\varepsilon>\frac{1}{n}$:

أي أنه يكفي أن نضع $x_0=\frac{1}{n}$ ومنه :

$$\inf(E)=0$$

4) لا يوجد n بحيث أن : $\frac{1}{n}=0$ ومنه $\min(E)$ غير موجود 1

التمرين 02: (8 نقاط)

1) a) $u_0=0$ ومنه $u_n \geq 0$ محققة بالنسبة للحد الأول.

نفرض أن $u_n \geq 0$ ومنه $2u_n+1>0$ و $u_n+2>0$ نستنتج أن:

$u_{n+1} \geq 0$

b) $u_n<1 \Leftarrow u_0=0$ محققة لما $n=0$

نفرض أن $u_n<1$، لدينا:

$$u_{n+1}=\frac{u_n+2+u_n-1}{u_n+2}=1+\frac{u_n-1}{u_n+2}$$

وعليه
$$u_{n+1}-1=\frac{u_n-1}{u_n+2}$$

وبما أن: $0 \leq u_n < 1$

فإن $u_{n+1}<1 \Leftarrow u_{n+1}-1<0$

2)
$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+1}{u_n+2}-u_n=\frac{2u_n+1-u_n^2-2u_n}{u_n+2}$$
$$=\frac{1-u_n^2}{u_n+2}$$

بما أن $0 \leq u_n<1$ فإن:

$1-u_n^2>0$

ومنه

$u_{n+1}-u_n>0$

ومنه المتتالية u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

3)
$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$$
$$=\frac{2u_n+1-u_n-2}{2u_n+1+u_n+2}$$
$$=\frac{u_n-1}{3u_n+3}=\frac{1}{3}v_n$$

المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=-1$

0,5 $v_n = (-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{3^n}$ (4

لدينا:

$$v_n(U_n+1) = \frac{U_n-1}{U_n+1}(U_n+1) = U_n$$

$$\Leftrightarrow v_n U_n - U_n = -1 - v_n$$

ومنه

1 $$U_n = \frac{1+v_n}{1-v_n} = \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{3^n}}$$

بما أن $\left(\frac{1}{3^n}\right)$ متتالية هندسية أساسها : $-1 < \frac{1}{3} < 1$

فإن

0,5 $$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$$

التمرين 03 : (4 نقاط)

1) لدينا:

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

2

$$|x e^{\frac{1}{x^2}} + f(0)| < \varepsilon \Rightarrow |x| < \delta \ ?$$

معطى ، نبحث عنه

لدينا:

$$|x e^{-\frac{1}{x^2}}| < \varepsilon \Rightarrow |x| e^{-\frac{1}{x^2}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$

بما أن:

$$x^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{x^2}} < 1$$

فإن $e^{-\frac{1}{x^2}} < 1$ ومنه :

$$|x| e^{-\frac{1}{x^2}} < \varepsilon \Rightarrow |x| < \varepsilon$$

نستنتج أن $f(x)$ مستمرة عند $x=0$.

2) 2 $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} = 0$$

التمرين 04: (3 نقاط)

1) $v = 1\cancel{7}.1383$ حسب $\tanh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ 1,5

2) 1,5

$$\tanh x - \frac{2}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} - \frac{2}{1+e^{-2x}}$$

$$= \frac{(e^{x}-e^{-x})(1+e^{-2x}) - 2(e^{x}+e^{-x})}{(e^{x}+e^{-x})(1+e^{-2x})}$$

$$= \frac{(e^{x}+e^{-x}-e^{-x}-e^{-3x}) - 2e^{x} - 2e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}+e^{-x}+e^{-3x}}$$

$$= \frac{-e^{x}-2e^{-x}-e^{-3x}}{e^{x}+2e^{-x}+e^{-x}}$$

$$= -1$$