Abdelhafid Boussouf University Center
Institute of Science and Technology

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Exam of mathematics I

Normal session

1st semester 2023\2024

Date : $Jan\,13^{th}, 2024$
$10.30 - 12.00$
Duration : $1h\ 30min$

Exercise 1 (3pts)

1. Let P and Q be two statements. — 1. لتكن P و Q قضيتان

1.5 ~~1~~pt | Construct the truth table of: — أنشئ جدول حقيقة القضايا التالية:

$$P \cup Q, \bar{P} \cap Q$$

2. We consider the following sets: — 2. لنعتبر المجموعتان التاليتان:

$$A = \{3, 5, 8\}, B = \{1, 3, 5\}$$

1pt | Describe the following sets: — اوجد المجموعتان:

$$A \backslash B, A \cup B$$

3. Give the negation of the following statements: — 3. اعط نفي القضايا التالية

2pt

$$\forall x \in R, \exists y \in R : x > y$$
$$\exists x \in R\ \forall y \in R : x + y = 0$$

Exercise 2 (4 pts)

1. Consider the function: — 1. لنعتبر الدالة f المعرفة على R كما يلي :

$$f(x) = 2x - 1$$

2pts | Using the definition of the limit, prove that: — اثبت باستعمال تعريف النهاية ان

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

2. Let $\mathcal{R}$ be the relation defined by: — 2. لتكن $\mathcal{R}$ علاقة معرفة على R كما يلي :

$$\forall x, y \in R :\ x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y = 0$$

2.5 ~~2~~pts | Prove that $\mathcal{R}$ is an equivalent relation. — اثبت ان $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ

Exercise 3 (8pts)

I. The function f is given by: — الدالة f معرفة على R كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & if:\ x < 0 \\ x^2 + 1 & if:\ x \geq 0 \end{cases}$$

2 ~~1~~pt | 1. Show that f is continuous for all $a \in R$. — 1. اثبت ان الدالة f مستمرة من اجل كل قيم a

2pts | 2. Find the value of a for which f is differentiable on R? — 2. ماهي قيمة a التي من اجلها تكون الدالة f قابلة للاشتقاق على R

Dr. Harizi

II. Let g be a function defined by:

II. لتكن الدالة g المعرفة كما يلي:

$$g(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

1pt 1. Determine the domain of g (D_g)
1pt 2. Study the parity of g.
1pt 3. Prove that $0 < g \leq 1$
1pt 4. Give the derivative of g.
1pt 5. g is bijective on: $[0,+\infty[\longrightarrow]0,1]$. Find g^{-1}, the inverse function of g. Determine the domain and the image of g^{-1}.

1. ما هو مجال تعريف الدالة g (D_g)
2. ادرس زوجية الدالة g.
3. اثبت ان $0 < g\ (x) \leq 1$.
4. احسب مشتق الدالة g.
5. الدالة g هي تقابل على المجال: $[0,+\infty[\longrightarrow]0,1]$.
اوجد g^{-1}، الدالة العكسية للدالة g. اعط مجموعة الانطلاق والوصول للدالة g^{-1}.

Exercise 4 (5pts)

Consider the set E defined on R^3 by

لنعتبر المجموعة E المعرفة على R^3 كما يلي:

$$E = \{(x,y,z) \in R^3 : x + 2y - z = 0\}$$

1pt 1. Show that E is a non-empty set.
1pt 2. Show that E is a subspace of R^3
1pt 3. Find a basis of E.
1pt 4. Let $u = (2,1,4) \in R^3$. Is the vector $u \in E$?
1pt 5. Write u as a linear combination of the vectors (1,0,1) and (0,1,2).

1. اثبت ان E مجموعة غير خالية.
2. اثبت ان E فضاء شعاعي جزئي من R^3.
3. اوجد قاعدة لـ E.
4. ليكن الشعاع $u = (2,1,4)$ هل الشعاع u محتوى في E؟
5. اكتب الشعاع u في شكل تركيبة شعاعية من من الاشعة:
(1,0,1) and (0,1,2)

بالتوفيق للجميع

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف - ميلة

Institut : .... معهد : ....

Domaine de formation : .... ميدان التكوين : العلوم والتكنولوجيا

Module : .... المقياس : قسم هندسة الطرائق

Année universitaire : .... السنة الجامعية :

Nom et prénom : .... الإسم واللقب :

Section et groupe : .... الفصيلة والفوج :

Numéro d'inscription : ________ رقم التسجيل :

Réponse الإجابة

التمرين الاول :

1.5

1/ Truth table

P	Q	$\overline{P}$	$P \cup Q$	$\overline{P} \wedge Q$
T	T	F	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	F	T 0.5	F 0.5	F 0.5

1 2/ $A \setminus B = \{8\}$ 0.5 , $A \cup B = \{1, 3, 5, 8\}$ 0.5

3/ the negation of the statements.

1 $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x \leq y$

1 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x + y \neq 0$

Exercise 2:

$$f(x) = 2x - 1$$

Proving that $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ using definition

تعريف النهاية:

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in D$ جوار 1

$$|x-1| < \delta \implies |f(x) - 1| < \varepsilon$$

$$|x-1| < \delta \implies |2x-2| < \varepsilon$$

ليكن $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$:

$$|x-1| < \delta \implies 2|x-1| < 2\delta \implies |2x-2| < 2\delta$$

نضع $\varepsilon = 2\delta \Leftarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

إذن: $|x-1| < \frac{\varepsilon}{2} \implies 2|x-1| < \varepsilon$

$$\implies |2x-2| < \varepsilon$$

ومنه النهاية محققة بالتعريف

2/ $\mathcal{R}$ is defined by:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y = 0$$

لنثبت أن: $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ يكفي اثبات انها

1 * Reflexive: $x \mathcal{R} x$: $x - x = 0$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ is reflexive

0,5 * Symmetric: $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$:

$\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x - y = 0 \Rightarrow -(y - x) = 0 \Rightarrow y - x = 0$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ is symmetric

0,5 * Transitive: $x \mathcal{R} y$ and $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $x - y = 0$ and $y - z = 0$

$\Rightarrow x = y = z \Rightarrow x - z = 0$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ is Transitive

Then $\Rightarrow \mathcal{R}$ is ~~E~~ an equivalence relation

[redacted]

كتابة التعريف:

تكافؤ العلاقة R $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{reflexive} \\ \text{Symmetric} \\ \text{Transitive} \end{cases}$ 0,5

Exercise 3

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & x<0 \\ x^2+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

1/ إثبات أن f مستمرة

ax+1 دالة مستمرة على $x<0$ من أجل كل قيم a

0.5 و x^2+1 " " " $x>0$

إذن يكفي دراسة الاستمرارية عند 0

$f(0) = 0^2+1 = 1$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2+1 = 1$ 0.5

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} ax+1 = 1$ 0.5

إذن:

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = f(0)$ 0.5

ومنه f مستمرة من أجل كل قيم a

2/ إيجاد قيمة a التي من أجلها تكون الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ax+1 : قابلة للاشتقاق على $x<0$

x^2+1 " " " $x>0$

ندرس قابلية الاشتقاق عند $x=0$

0.5 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x^2+1-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$

$= f'_d(0)$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف - ميلة

Institut : .... معهد :
Domaine de formation : .... ميدان التكوين :
Module : .... المقياس :
Année universitaire : .... السنة الجامعية :
Nom et prénom : .... الإسم واللقب :
Section et groupe : .... الفصيلة والفوج :
Numéro d'inscription : .... رقم التسجيل :

معهد العلوم والتكنولوجيا — قسم هندسة الطرائق

Réponse الإجابة

0,5 $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{ax+1-1}{x} = a = f'_g(0)$

لتكون f قابلة للاشتقاق عند 0 يجب أن يكون

$f'_d(0) = f'_g(0)$ 0,5

ومنه $a = 0$ 0,5

II $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

مجال تعريف g :

g معرفة من أجل $x^2+1 \neq 0$ ⇐ $x^2 \neq -1$: محققة من أجل $x \in \mathbb{R}$

ومنه

$D_g = \mathbb{R}$ 1

2 - زوجية الدالة :

$g(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = g(x)$ 1

إذن g دالة زوجية

3/ اثبات أن: $0 < g(x) \leq 1$

0,5 لدينا: $x^2+1 > 0$ إذن: $\frac{1}{x^2+1} > 0$

0,5 أيضا: $x^2 \geq 0 \Leftarrow x^2+1 \geq 1 \Leftarrow \frac{1}{x^2+1} \leq 1$

ومنه المطلوب

$0 < g(x) \leq 1$

4. مشتق الدالة g:

$g'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ 1

5. ايجاد g^{-1}: نضع $g(x) = y$

0,5 $y = \frac{1}{x^2+1}$ ، ~~لدينا~~ $g(x) \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$

$\Rightarrow x^2+1 = \frac{1}{y} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{y} - 1$

$x \in [0, +\infty[$

إذن: $\Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$

اذا كانت g^{-1} خاطئة
تحسب 1 مباشرة $g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$ 0,5

مجموعة الانطلاق لـ g^{-1} هي مجموعة وصول g

إذن هي: $]0,1]$ 0,5

مجموعة وصول g^{-1} هي مجموعة انطلاق g

إذن هي $[0, +\infty[$ 0,5

التمرين 4

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$$

1. اثبات أن E غير خالية:

1

$(0,0,0) \in \mathbb{R}$ $\quad 0 + 2\cdot 0 - 0 = 0 \Rightarrow E \neq \emptyset$

أي عنصر آخر ينتمي مقبول

2. E فضاء شعاعي جزئي:

التعريف

0,5

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall u, v \in E \iff \alpha u + \beta v \in E$

ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و $u(x, y, z) \in E$, $v(x', y', z') \in E$

$$\alpha u + \beta v = \alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')$$
$$= (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$$

لدينا $u, v \in E$ اذن:

$$x + 2y - z = 0 \quad , \quad x' + 2y' - z' = 0$$

ومنه

$$(\alpha x + \beta x') + 2(\alpha y + \beta y') - (\alpha z + \beta z') =$$
$$= \alpha(x + 2y - z) + \beta(x' + 2y' - z') = 0$$

اذن: $\alpha u + \beta v \in E$

0,5

ومنه E فضاء شعاعي جزئي

ايجاد قاعدة لـ E:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$$
$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = z\}$$
$$= \{(x, y, x + 2y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2) ; x, y \in \mathbb{R}\}$$

0,5 0,5

ومنه $\{(0,1,2),(1,0,1)\}$ قاعدة لـ E

لأن الشعاعان مستقلان خطيا

4. $u(2,1,4)$:

1 $2+2(1)-4=0$

إذن: $u \in E$

5. تركيبة خطية: $u = \alpha_1(0,1,2) + \alpha_2(1,0,1)$

حيث: $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$(2,1,4) = (\alpha_2, \alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$$

0,5

0,5

$$u = 1(0,1,2) + 2(1,0,1)$$