Corrigé type de l'examen final

Transfert de chaleur I

Durée : 1 h 30 mn

Exercice n°1 (4 points)

Comme le coefficient de frottement pariétal est

$$Cf_P = \frac{2\nu}{U_\infty^2}\left(\frac{\partial V_x(x,y)}{\partial y}\right)_{y=0}$$

nous avons

$$[Cf_P] = \frac{[\nu]}{[U_\infty^2]}\frac{[V_x(x,y)]}{[y]} = \frac{m^2 s^{-1} m s^{-1}}{m^2 s^{-2} m} = 1 \quad \boxed{1.0+1.0+1.0+1.0}$$

ainsi le coefficient de frottement pariétal est adimensionnel.

Exercice n°2 (6 points)

Un mur plan est constitué d'un matériau de conductivité thermique $\lambda(x) = \lambda_m e^{-\frac{x}{L}}$

1) Le flux de chaleur échangé q :

$$q = -\lambda(x)\frac{dT(x)}{dx} = -\lambda_m e^{-\frac{x}{L}}\frac{dT(x)}{dx} \quad \boxed{2,0}$$

$$\frac{q}{\lambda_m} e^{\frac{x}{L}} dx = -dT(x)$$

$$\frac{q}{\lambda_m}\int_0^L e^{\frac{x}{L}} dx = -\int_{\alpha T_0}^{T_0} dT(x) = \int_{T_0}^{\alpha T_0} dT(x) \text{ soit } \frac{qL}{\lambda_m}\left[e^{\frac{x}{L}}\right]_0^L = \left[T(x)\right]_{T_0}^{\alpha T_0}$$

d'où
$$\frac{qL}{\lambda_m}(e-1) = (\alpha-1)T_0$$

$$q = \frac{(\alpha-1)\lambda_m T_0}{(e-1)L} \quad \boxed{1,0}$$

2) La température $T(x)$:

$$\frac{q}{\lambda_m}\int_0^x e^{\frac{x}{L}} dx = \int_{T(x)}^{\alpha T_0} dT(x) \quad \boxed{1,0}$$

$$\frac{qL}{\lambda_m}\left[e^{\frac{x}{L}}\right]_0^x = \left[T(x)\right]_{T(x)}^{\alpha T_0}$$

$$T(x) = \left(\alpha - \frac{(\alpha-1)\left(e^{\frac{x}{L}}-1\right)}{(e-1)}\right)T_0 \quad \boxed{1,0}$$

3) La température du mur T_r à $x = \frac{L}{4}$:

$$T_r = \left(\alpha - \frac{(\alpha-1)\left(e^{\frac{1}{4}}-1\right)}{(e-1)}\right)T_0 \quad \boxed{1,0}$$

<u>Exercice n°3</u> (10 points)

1) Les unités des constantes q_0 et m sont :

$$[q_0] = [q_S] = Wm^{-3} \quad \boxed{1,5}$$

$$[m] = [x] = m \quad \boxed{1,5}$$

2) L'équation de Poisson dans ce cas est :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_0}{\lambda} cos\left(\frac{x}{m}\right) = 0 \quad \boxed{1,0}$$

3) Les conditions aux limites pour cette équation sont :

$$x = 0, \frac{dT}{dx} = 0$$
$$x = L, T = T_0 \quad \boxed{0,5+0,5}$$

4) L'intégration de l'équation de Poisson deux fois, nous donne :

$$\frac{dT(x)}{dx} = -\frac{q_0 m}{\lambda} sin\left(\frac{x}{m}\right) + C_1 \quad \boxed{0,5}$$

$$T(x) = \frac{q_0 m^2}{\lambda} cos\left(\frac{x}{m}\right) + C_1 x + C_2 \quad \boxed{0,5}$$

en calculant les constantes d'intégration C_1 et C_2 à partir des conditions aux limites, nous obtenons :

$$C_1 = 0$$ 1,0

$$C_2 = T_0 - \frac{q_0 m^2}{\lambda} cos\left(\frac{L}{m}\right)$$ 1,0

5) Ainsi, la distribution de la température s'écrit sous la forme :

$$T(x) - T_0 = \frac{q_0 m^2}{\lambda}\left(cos\left(\frac{x}{m}\right) - cos\left(\frac{L}{m}\right)\right)$$ 1,0

6) Le flux de chaleur évacué est :

$$q = -\lambda\left(\frac{dT(x)}{dx}\right)_{x=L} = q_0 m\, sin\left(\frac{L}{m}\right)$$ 1,0