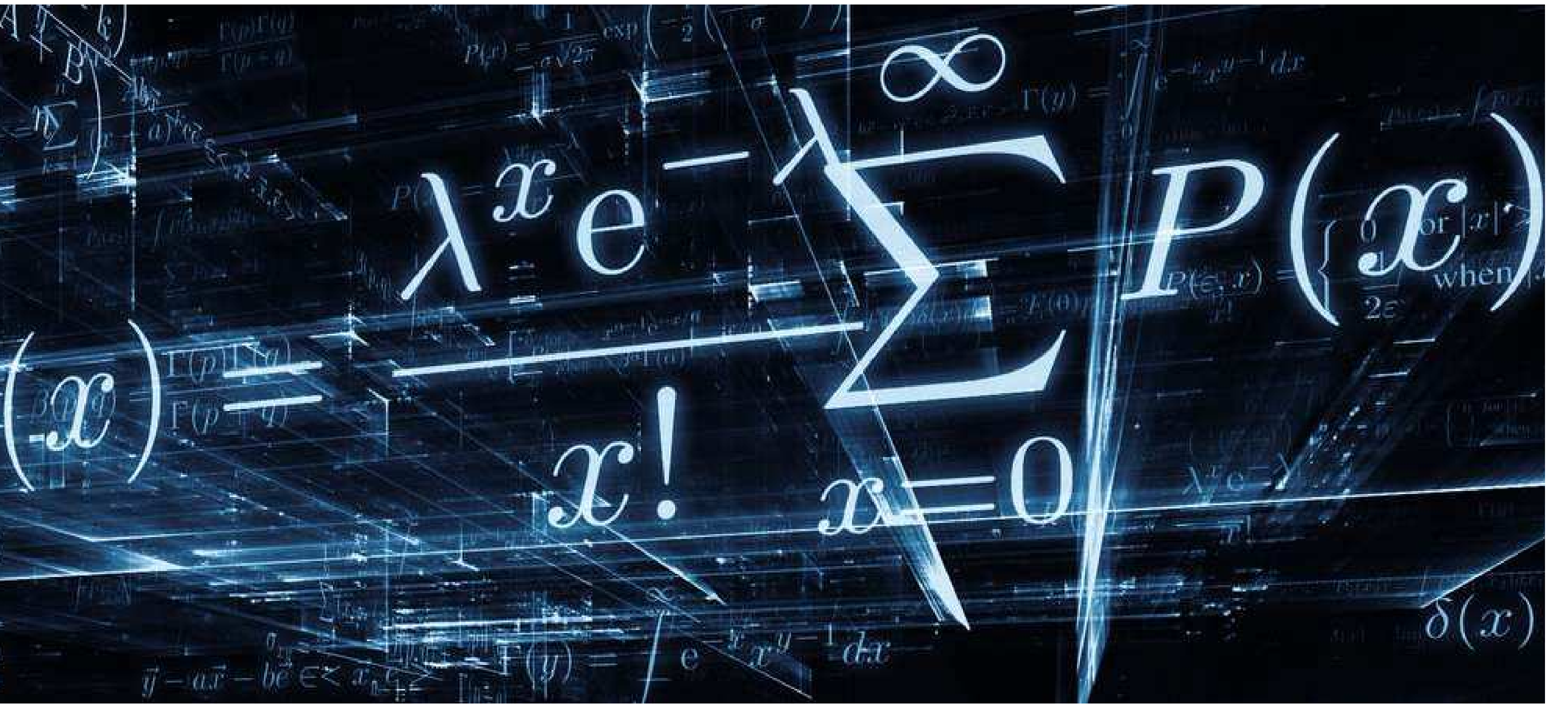


ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

COURS ET EXERCICES CORRIGÉS

Cycle Master

Yacine HALIM

Centre Universitaire Abdelhfid Boussouf Mila

1. Introduction

L'ancienneté, la richesse ainsi que la flexibilité appréciable d'utilisation, ont permis aux équations aux différences d'être un sujet attractif ces derniers temps au milieu des chercheurs et des scientifiques de différentes disciplines.

Cet cours est destiné principalement aux étudiants de première année de Master mathématiques LMD. L'origine de ce cours est un enseignement donné en Centre Universitaire de Mila entre 2014 et 2023. Ce polycopiée est composé de quatre chapitres ordonnés comme suit :

- Dans le premier chapitre, on commence par les équations aux différences linéaires. La théorie des équations aux différences linéaires se base principalement sur les propriétés de l'algèbre linéaire qui offrent des méthodes simples pour résoudre ces équations,
- Le deuxième chapitre, consacré aux équations aux différences linéaires,nous présentons la définition de stabilité, la linéarisation ainsi que quelques théorèmes fondamentales de la théorie des équations aux différences.
- Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à la solution des systèmes d'équations aux différences linéaires d'ordre un. Nous nous utilisons le calcule matricielles pour résoudre ces systèmes.
- Dans le dernier chapitre, on considère les systèmes des équations aux différences non linéaires. Nous présentons la stabilité, la linéarisation ainsi que quelques théorèmes fondamentales dans le cas multidimensionnelles.

Tous les chapitres s'achèvent par des exercices corrigés en détail.

2. Équations aux différences linéaires

2.1 Définitions et résultats généraux

Définition 2.1.1 Une équation de la forme

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = g(n) \tag{2.1}$$

avec, $p_0(n) = 1, p_1(n), p_2(n), \ldots, g(n)$ sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}_{n_0}$, s'appelle ***équation aux différences linéaire*** d'ordre k dés que $p_k(n) \neq 0$.

R En générale on associe k conditions initiales avec l'équation (2.1)

$$x_{n_0} = c_1, x_{n_0+1} = c_2, \ldots, x_{n_0+k-1} = c_k, \tag{2.2}$$

avec c_i, $i = 1, \ldots, k$ sont des constantes réelles ou complexes.

R On a les notations suivants

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.
- $\mathbb{N}_{n_0} = \{n \geq n_0, n \ entier\}$.

■ **Example 2.1**

1. L'équation

$$x_{n+4} - n^2 x_{n+2} + \frac{n^2+1}{n} x_{n+1} - 5x_n = 2n^2$$

   est une équation aux différences linéaire d'ordre 4 .
2. L'équation

$$x_{n+2} = 2^n x_{n+1} + x_n - e^{-n}$$

   est une équation aux différences linéaire d'ordre 2 .

3. L'équation
$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n + x_{n-1}}$$
est une équation aux différences non linéaire .

■

■ **Example 2.2** On consédère l'équation aux differnces linéaire d'ordre 3
$$x_{n+3} - \frac{n}{n+1}x_{n+2} + nx_{n+1} - 3x_n = n \tag{2.3}$$
où $x_1 = 0, x_2 = -1$ et $x_3 = 1$. Trouver les terms x_4, x_5, x_6 et x_7.
On écrit (2.3) sous la forme
$$x_{n+3} = \frac{n}{n+1}x_{n+2} - nx_{n+1} + 3x_n + n \tag{2.4}$$
On pose $n = 1$ dans (2.4), On a
$$x_4 = \frac{1}{2}x_3 - x_2 + 3x_1 + 1 = \frac{5}{2}.$$
Pour $n = 2$,
$$x_5 = \frac{2}{3}x_4 - 2x_3 + 3x_2 + 2 = -\frac{4}{3}.$$
Pour $n = 3$
$$x_6 = \frac{3}{4}x_5 - 3x_4 + 3x_3 + 3 = -\frac{2}{3}.$$
Pour $n = 4$
$$x_7 = \frac{4}{5}x_6 - 4x_5 + 3x_4 + 4 = 20.9.$$

■

Définition 2.1.2 L'équation aux différences (2.1) avec $g(n) = 0$, $\forall n \geq n_0$ est dite équation aux différences linéaire ***homogène*** et elle s'écrit comme suit
$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = 0. \tag{2.5}$$

■ **Example 2.3**
1. L'équation
$$x_{n+3} - e^n x_{n+2} + \frac{n^2+1}{n+1}x_{n+1} - x_n = 0.$$
est une équation aux différences linéaire homogène d'ordre 3 .
2. L'équation
$$x_{n+2} = \frac{2^n}{n+3}x_{n+1} + x_n - logn$$
est une équation aux différences linéaire non homogène d'ordre 2.

■

Définition 2.1.3 Une suite $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ est dite ***solution*** de l'équation (2.1) avec les conditions initiales (2.2) si elle satisfait la relation (2.1).

Théorème 2.1.1 L'équation (2.1) avec les conditions initiales (2.2) admet une et une seul solution.

Démonstration. Soit $\{x_n\}_{n\geq n_0}$ une solution de l'équation (2.1) avec les conditions initilaes (2.2), alors

$$x_{n+k} = -p_1(n)x_{n+k-1} - \ldots - p_k(n)x_n + g(n)$$

et

$$x_{n_0} = c_1, x_{n_0+1} = c_2, \ldots, x_{n_0+k-1} = c_k,$$

Supposons que $\{\widetilde{x}_n\}_{n\geq n_0}$ une autre solution de l'équation (2.1) avec les conditions initilaes (2.2), alors

$$\widetilde{x}_{n_0} = c_1, \widetilde{x}_{n_0+1} = c_2, \ldots, \widetilde{x}_{n_0+k-1} = c_k,$$

donc

$$x_n = \widetilde{x}_n, \quad pour\ n =_0, n_0+1, \ldots, n_0+k-1.$$

Et comme

$$\widetilde{x}_{n+k} = -p_1(n)\widetilde{x}_{n+k-1} - \ldots - p_k(n)\widetilde{x}_n + g(n)$$

on obtient que

$$x_n = \widetilde{x}_n, \quad pour\ n \geq n_0 + k.$$

Alors

$$x_n = \widetilde{x}_n, \quad pour\ n \geq n_0.$$

Par conséquent on a l'unisité de solution de l'équation (2.1) avec les conditions initiales (2.2). ■

Théorème 2.1.2 L'ensemmble S des solutions de l'équation aux différences (2.5) est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension k.

Démonstration. Soit $S = \{x = (x_n)_{x\geq n_0}, x_i \in \mathbb{K} : x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = 0.\}$ l'ensemble de toutes les solutions de l'équation aux différences (2.5). On a

$$S \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots),\ u_i \in \mathbb{K}\}.$$

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on a les deux opérations "+" et "." définies par
- $(x_n)_{n\geq n_0} + (y_n)_{n\geq n_0} = (x_n + y_n)_{n\geq n_0}$,
- $\lambda.(x_n)_{n\geq n_0} = (\lambda x_n)_{n\geq n_0}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$S \neq \phi$ car la suite à éléments tous nuls satisfait l'équation (2.5).
Soient $(x_n)_{n\geq n_0}, (y_n)_{n\geq n_0} \in S$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} \alpha x_{n+k} + \beta y_{n+k} &= \alpha(-p_1(n)x_{n+k-1} - p_2(n)x_{n+k-2} - \ldots - p_k(n)x_n) \\ &+ \beta(-p_1(n)y_{n+k-1} - p_2(n)y_{n+k-2} - \ldots - p_k(n)y_n) \\ &= -p_1(n)(\alpha x_{n+k-1} + \beta y_{n+k-1}) - p_2(n)(\alpha x_{n+k-2} + \beta y_{n+k-2}) - \ldots - p_k(n)(\alpha x_n + \beta y_n). \end{aligned}$$

Donc $\alpha(x_n)_{n\geq n_0} + \beta(y_n)_{n\geq n_0} \in S$. Rest à montrer $quedim(S) = k$, pour cela on va montrer que S est isomorphe au sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^k$ définit par

$$\mathbb{K}^k = \{(v_0, v_1 v \ldots, v_{k-1}), v_i \in \mathbb{K}\},$$

posons

$$\begin{aligned} \varphi :\ & S \longrightarrow \mathbb{K}^k \\ & x \longmapsto \varphi(x) = (x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_0+k-1}) \end{aligned}$$

Il est claire que φ est une application bien définie, montrons qu'elle est linéaire :
Soit $x,y \in S$, et $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha x+\beta y) &= (\alpha x_{n_0}+\beta y_{n_0},\alpha x_{n_0+1}+\beta y_{n_0+1},\ldots,\alpha x_{n_0+k-1}+\beta y_{n_0+k-1})\\
&= \alpha(x_{n_0},x_{n_0+1},\ldots,x_{n_0+k-1})+\beta(y_{n_0},y_{n_0+1},\ldots,y_{n_0+k-1})\\
&= \alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y).
\end{aligned}$$

Donc φ est un homomorphisme d'espaces vectoriel.
On va montrer que φ est bijectif, commençons par l'injectivité. On a

$$\begin{aligned}
ker(\varphi) &= \{x\in S : \varphi(x)=0_{\mathbb{K}^k}\}\\
&= \{x\in S : (x_{n_0},x_{n_0+1},\ldots,x_{n_0+k-1})=(0,0,\ldots,0)\}\\
&= \{x\in S : x_{n_0}=0,x_{n_0+1}=0,\ldots,x_{n_0+k-1}=0\}
\end{aligned}$$

et comme les $x_n, n\geq n_0+k$ s'écrivent au fonction de $x_{n_0+k-1},x_{n_0+k-2},\ldots,x_{n_0}$, alors

$$\begin{aligned}
ker(\varphi) &= \{x\in S : x_n=0,\forall n\geq n_0\}\\
&= \{(0,0,\ldots,0)\}\\
&= \{0_{\mathbb{K}^k}\}
\end{aligned}$$

d'où φ est injectif.
On va montrer que φ est surjectif. Soit $(c_1,c_2,\ldots,c_k)\in\mathbb{K}^k$, définissons la suite $(x_n)_{n\geq n_0}\in S$

$$x_{n_0}=c_1,x_{n_0+1}=c_2,\ldots,x_{n_0+k-1}=c_k,x_{n+k}=-p_1(n)x_{n+k-1}-\cdots-p_k(n)x_n, n\geq n_0$$

alors,

$$\varphi((x_n)_{n\geq n_0})=(c_1,c_2,\ldots,c_k)$$

donc φ est surjectif.
Comme $dim(\mathbb{K}^k)=k$, on déduit que S est un espace vectoriel de dimension k. ■

Définition 2.1.4 Le ***Casoratien*** $W(n)$ des solutions $(x_n^1)_{n\geq n_0},(x_n^2)_{n\geq n_0},\ldots,(x_n^k)_{n\geq n_0}$ de l'équation aux différences (2.5) est donné par

$$W(n)=det\begin{pmatrix} x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^k\\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n+k-1}^1 & x_{n+k-1}^2 & \ldots & x_{n+k-1}^k\end{pmatrix}.$$

■ **Example 2.4** Soit l'équation aux différences linéaire d'odre 2 suivante

$$x_{n+2}-\frac{3n-2}{n-1}x_{n+1}+\frac{2n}{n-1}x_n=0,\ n=2,3,\ldots$$

qui admette les solutions n et 2^n, alors le Casoratien de ces solutions est donné par

$$\begin{aligned}
W(n) &= det\begin{pmatrix} n & 2^n\\ n+1 & 2^{n+1}\end{pmatrix}\\
&= n.2^{n+1}-2^n(n+1)\\
&= 2^n(n-1).
\end{aligned}$$

■

Définition 2.1.5 Les fonctions $f_1(n), f_2(n), \dots, f_k(n)$ sont linéaires dépendants pour $n \geq n_0$ si existe des constants $a_1, a_2, \dots, a_k$ non nuls tels que

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \ldots + a_k f_k(n) = 0, \quad n \geq n_0.$$

On dit que la famille des fonctions $\{f_i(n)\}_{i=1}^k$, sont linéairement indépendantes si pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(n) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, k, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Lemme 2.1.3 (Lemme d'Abel) Soient $(x_n^1)_{n \geq n_0}, (x_n^2)_{n \geq n_0}, \dots, (x_n^k)_{n \geq n_0}$ sont des solutions de l'équation homogène (2.5), et soit $W(n)$ leur Casoratien alors, pour tout $n \geq n_0$

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0). \tag{2.6}$$

Démonstration. On démontre le lemme pour $k = 3$, le cas générale se démontre de la même façon. On a On a

$$W(n) = det \begin{pmatrix} x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^2 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$W(n+1) = det \begin{pmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^2 \\ x_{n+3}^1 & x_{n+3}^2 & x_{n+3}^2 \end{pmatrix}.$$

De l'équation (1), on pour $i = 1, 2, 3$

$$x_{n+3}^i = -p_1(n) x_{n+2}^i - p_2(n) x_{n+1}^i - p_3 x_n^i.$$

Ainsi

$$W(n+1) = \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^2 \\ -p_1(n) x_{n+2}^1 - p_2(n) x_{n+1}^1 - p_3 x_n^1 & -p_1(n) x_{n+2}^2 - p_2(n) x_{n+1}^2 - p_3 x_n^2 & -p_1(n) x_{n+2}^3 - p_2(n) x_{n+1}^3 - p_3 x_n^3 \end{vmatrix}.$$

On fait l'operation $L_3 = L_3 + p_1 L_2 + p_2 L_1$, on obtien

$$\begin{aligned} W(n+1) &= \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^2 \\ -p_3 x_n^1 & -p_3 x_n^2 & -p_3 x_n^3 \end{vmatrix}. \\ &= -p_3 \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^2 \\ x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 \end{vmatrix}. \\ &= -p_3 \begin{vmatrix} x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^2 \\ x_{n+3}^1 & x_{n+3}^2 & x_{n+3}^3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^3 p_3(n) W(n). \end{aligned}$$

Donc

$$W(n) = (-1)^{3n} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_3(i) \right) W(0).$$

Car

$$y_{n+1} = a(n)y_n \Rightarrow y_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0.$$

(Voir exercice (2.1)). ■

Corollaire 2.1.4
Supposons que $p_k(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$. Alors le Casoratien $W(n) \neq 0$ pour chaque $n \geq n_0$ si et seulement si $W(n_0) \neq 0$.

Démonstration. Il découle directement de la formule (2.6). ■

Proposition 2.1.5
Soit $B = \left\{ (x_n^1)_{n \geq n_0}, (x_n^2)_{n \geq n_0}, \ldots, (x_n^k)_{n \geq n_0} \right\}$ une ensemble des solutions de l'équation aux différences (2.5), alors B est libre si et seulement si $W(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$.

Démonstration. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_1 x_n^1 + \alpha_2 x_n^2 + \cdots + \alpha_k x_n^k = 0, \quad \forall n \geq n_0$$

donc

$$\begin{cases} \alpha_1 x_n^1 + \alpha_2 x_n^2 + \cdots + \alpha_k x_n^k = 0, \\ \alpha_1 x_{n+1}^1 + \alpha_2 x_{n+2}^2 + \cdots + \alpha_k x_{n+1}^k = 0, \\ \vdots \\ \alpha_1 x_{n+k-1}^1 + \alpha_2 x_{n+k-1}^2 + \cdots + \alpha_k x_{n+k-1}^k = 0, \end{cases}$$

ce système sécrit

$$X(n)b = 0$$

avec

$$X(n) = \begin{pmatrix} x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^k \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+k-1}^1 & x_{n+k-1}^2 & \cdots & x_{n+k-1}^k \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Donc le système admet le vecteur nul comme solution si et seulement si $X(n)$ est inversible, c'est à dire

$$det X(n) = W(n) \neq 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

■

Définition 2.1.6
Un ensemble de k solutions libres de l'équation aux différences (2.5) dit ***ensemble fondamentale*** des solutions.

■ **Example 2.5**
Vérifier que $\{n, 2^n\}$ est un ensemble fondamentale des solutions de l'équation aux différences

$$x_{n+2} - \frac{3n-2}{n-1}x_{n+1} + \frac{2n}{n-1}x_n = 0, \quad n \geq 2.$$

Il facile de voir que n et 2^n son des solutions de catte equation. Maintenat la Casoratien des solution n et 2^n est donner par

$$W(n) \;=\; det\begin{pmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc

$$W(2) \;=\; det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

Alors d'aprés la proposition (2.1.5) n et 2^n sont libres, et donc forme un ensemble fondamentale. ■

Le théorème suvant montre que l'équation aux différences linéaire homogène (2.5) admet toujours un ensemble fondamentale des solutions (c'est-à-dire une base des solutions).

Théorème 2.1.6 (**Théorème fondamental**)
Si $p_k(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$, l'équation aux différences linéaire homogène (2.5) admet un ensemble fondamentale de solutions.

Démonstration. Soit l'équation aux différences linéaire homogène (2.5) qui admet les solutions $(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \dots, (x_n^k)_{n\geq n_0}$, qui obtenues en associant k valeurs initiales comme suit

$$\begin{array}{ll} (x_n^1)_{n\geq n_0}: & x_{n_0}^1 = 1, x_{n_0+1}^1 = x_{n_0+2}^1 = \cdots = x_{n_0+k-1}^1 = 0, \\ (x_n^2)_{n\geq n_0}: & x_{n_0}^2 = 0, x_{n_0+1}^2 = 1, x_{n_0+2}^2 = \cdots = x_{n_0+k-1}^1 = 0, \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ (x_n^k)_{n\geq n_0}: & x_{n_0}^k = x_{n_0+1}^k = \cdots = x_{n_0+k-2}^k = 0, x_{n_0+k-1}^k = 1. \end{array}$$

Ainsi

$$W(n_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Donc d'aprés la proposition (2.1.5) et le corroliare (2.1.4) l'ensemble

$$\left\{(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \dots, (x_n^k)_{n\geq n_0}\right\}$$

forme une base pour l'espace des solutions de l'équation (2.5). ■

Proposition 2.1.7 Si $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k$ sont des solutions de l'équation (2.5). Alors

$$x_n = a_1 x_n^1 + a_2 x_n^2 + \ldots + a_k x_n^k$$

est aussi est un solution de l'équation (2.5), avec a_i sont des constants arbitraires.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
x_{n+k}+p_1(n)x_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)x_n &= a_1x^1_{n+k}+a_2x^2_{n+k}+\ldots+a_kx^k_{n+k}\\
&+ p_1(n)a_1x^1_{n+k-1}+a_2x^2_{n+k-1}+\ldots+a_kx^k_{n+k-1}\\
&\vdots\\
&+ p_k(n)a_1x^1_{n}+a_2x^2_{n}+\ldots+a_kx^k_{n}\\
&= a_1\left(x^1_{n+k}+p_1(n)x^1_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)x^1_n\right)\\
&+ a_2\left(x^2_{n+k}+p_1(n)x^2_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)x^2_n\right)\\
&\vdots\\
&+ a_k\left(x^k_{n+k}+p_1(n)x^k_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)x^k_n\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$x_n=a_1x^1_n+a_2x^2_n+\ldots+a_kx^k_n$$

est un solution de l'équation (2.5). ■

Corollaire 2.1.8 Soit $\left\{(x^1_n)_{n\geq n_0},(x^2_n)_{n\geq n_0},\ldots,(x^k_n)_{n\geq n_0}\right\}$ un ensemble fondamentale de solutions de l'équation (2.5). Alors la solution génélale de (2.5) est donné par

$$x_n=\sum_{i=1}^{k}a_ix^i_n$$

avec a_i sont des constants arbitraires.

Lemme 2.1.9 Soient $(x_n)_{n\geq n_0},(y_n)_{n\geq n_0}$ deux solutions de l'équation (2.1), alors $(z_n)_{n\geq n_0}=(x_n-y_n)_{n\geq n_0}$ est une solution de l'équation (2.5).

Démonstration.
On a $(x_n)_{n\geq n_0},(y_n)_{n\geq n_0}$ sont des solutions de l'équation (2.1), alors

$$x_{n+k}+p_1(n)x_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)x_n=g(n)$$

et

$$y_{n+k}+p_1(n)y_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)y_n=g(n)$$

donc

$$x_{n+k}-y_{n+k}+p_1(n)(x_{n+k-1}-y_{n+k-1})+\ldots+p_k(n)(x_n-x_n)=0$$

Par conséquent, $(z_n)_{n\geq n_0}=(x_n-y_n)_{n\geq n_0}$ est une solution de l'équation (2.5). ■

Théorème 2.1.10 Soient $\left\{(x^1_n)_{n\geq n_0},(x^2_n)_{n\geq n_0},\ldots,(x^k_n)_{n\geq n_0}\right\}$ un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.5) et $(x^p_n)_{n\geq n_0}$ une solution particulière de l'équation (2.1), alors toute solutions générale de l'équation (2.1) prend la forme

$$x_n=\sum_{i=1}^{k}a_ix^i_n+x^p_n,\quad n\geq n_0.$$

Démonstration.
Si $(x_n)_{n\geq n_0}$ est la solution générale de (2.1), et $(x_n^p)_{n\geq n_0}$ une solution particulière de cette équation, alors d'après le lemme (2.1.9), $(x_n - x_n^p)_{n\geq n_0}$ est une solution de l'équation (2.5), ainsi

$$x_n - x_n^p = \sum_{i=1}^{k} a_i x_n^i, \quad a_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, \ldots, k, n \geq n_0.$$

■

2.2 Les équations aux différences linéaires à coefficients constants

Dans toute la suite, on s'intéresse aux équations aux différences à coefficients constants homogènes, c'est-à-dire

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + \cdots + p_k x_n = 0. \tag{2.7}$$

Les p_i sont des constantes réels ou complexes.

2.2.1 Résolution de l'équation homogène

Notre but et trouver un ensemble fondamentale de solutions et, par conséquent la solution générale de l'équation (2.7).

Théorème 2.2.1 L'équation (2.7) a des solutions de la forme

$$x(n) = \lambda^n$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$et vérifie

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0. \tag{2.8}$$

Démonstration. En remplaçant par $x(n) = \lambda^n$ dans l'équation (2.7), on trouve

$$\lambda^n \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0$$

puisque

$$\sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0.$$

Alorsλ^n est une solutions de l'équation (2.7). ■

Définition 2.2.1 Le polynôme

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i}$$

s'appelle le ***polynôme caractéristique*** associé à l'équation (2.7).

■ **Example 2.6**

1. Le polynôme caractéristique associé à l'équation

$$x_{n+4}+2x_{n+3}-x_{n+2}+7x_{n+1}-3x_n=0$$

est
$$P(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3-\lambda^2+7\lambda-3.$$

2. Le polynôme caractéristique associé à l'équation

$$x_{n+3}+5x_{n+1}-12x_n=0$$

est
$$P(\lambda)=\lambda^3+5\lambda-12.$$

■

Théorème 2.2.2
Si les racines $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ du polynôme caractéristique $P(\lambda)$ sont distinctes, alors $\{\lambda_1^n,\lambda_2^n,\dots,\lambda_k^n\}$ est un ensemble fondamental des solutions pour l'équation (2.7) .

Démonstration. Si $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ sont des racines distinctes du $P(\lambda)$ alors $\{\lambda_1^n,\dots,\lambda_k^n\}$ sont k solutions de l'équation (2.7). Montrons qu'ils sont linéairement indépendantes. Il suffit de trouver un n_0 tel que $W(n_0)\neq 0$.
Le Casoratient des donné par

$$W(n)=det\begin{pmatrix}\lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_k^n\\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & \cdots & \lambda_k^{n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_2^{n+k-1} & \cdots & \lambda_k^{n+k-1}\end{pmatrix}$$

choisissons $n_0=0$, on obtient

$$W(0)=det\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}=\prod_{i>j,i,j=1,\dots,k}(\lambda_i-\lambda_j)$$

Ainsi
$$W(0)\neq 0,$$

alors $\{\lambda_1^n,\lambda_2^n,\dots,\lambda_k^n\}$ est libre donc forme un ensemble fondamental des solutions pour l'équation (2.7). ■

R

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1}\end{vmatrix}=\prod_{i>ji,j=1,\dots,k}(\lambda_i-\lambda_j)$$

est appelé le déterminant de Vandermonde gènèralisè.

Corollaire 2.2.3 Du théorème précédent, il résulte que toute solution de l'équation (2.7) s'écrit comme combinaison linéaire de $\lambda_i^n, i = 1, \ldots, k$, i.e,

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n, c_i \in \mathbb{R}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des racines distinctes du polynôme caractéristique $P(\lambda)$.

Théorème 2.2.4 Supposons que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, $r < k$ sont les racines du polynôme caractéristique associé à l'équation (2.7) avec les multiplicitée $m_1, m_2, \ldots, m_r$ respectivement ($\sum_{i=1}^{r} m_i = k$). alors

$$\Big\{(\lambda_1^n)_{n\geq n_0}, (n\lambda_1^n)_{n\geq n_0}, \ldots, (n^{m_1-1}\lambda_1^n)_{n\geq n_0}, (\lambda_2^n)_{n\geq n_0}, (n\lambda_2^n)_{n\geq n_0}, \ldots, (n^{m_2-1}\lambda_2^n)_{n\geq n_0}, \cdots$$

$$(\lambda_r^n)_{n\geq n_0}, (n\lambda_r^n)_{n\geq n_0}, \ldots, (n^{m_r-1}\lambda_r^n)_{n\geq n_0}, \Big\}$$

est un ensemmble fondamental pour l'équation (2.7).

Corollaire 2.2.5 La solution générale de l'équation (2.7)s'écrit :

$$y(n) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n, c_{i,j} \in \mathbb{R}$$

où

- Le paramètre $s \leq k$ désigne le nombre de racines distinctes de l'équation caractéristique (2.8).
- Le paramètre λ_i désigne une racine de l'équation caractéristique (2.8).
- Le paramètre m_i désigne la multiplicité de la racine λ_i.
- Les coefficients $c_{i,j}$ sont des constantes qui sont déterminées à partir des conditions initiales.

■ **Example 2.7** **(Racines réelles simples)**

On considère l'équation

$$x_{n+2} - x_{n+1} - \frac{1}{4} x_n = 0, \text{ avec } x_0 = 0 \quad et \quad x_1 = 1. \tag{2.9}$$

L'équation caractéristique de (2.9) est

$$\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4} = 0.$$

Ainsi, les racines sont

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

La solution générale de l'équation (2.9) s'écrit

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} \right)^n$$

Utilisons les conditions initiales, on obtient

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

D'ou
$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

■

■ **Example 2.8** (**Racines réelles multiples**)
Considérons l'équation aux différences linéaires d'ordre 3.

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + \frac{13}{4}x_{n+1} - \frac{3}{4}x_n = 0, \quad n \geq 0 \tag{2.10}$$

avec $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1$.
Son polynôme caractéristique associé est

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + \frac{13}{4}\lambda - \frac{3}{4}$$

qui admet deux racines

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2} \text{ (racine double)} .$$

La solution générale de(2.10) s'écrit

$$x_n = c_1(3)^n + (c_2 + c_3 n)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour trouver les constantes c_1, c_2 et c_3 on résoudre le système

$$\begin{cases} x_0 = & c_1 + c_2 & = 0 \\ x_1 = & 3c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3 & = 1 \\ x_2 = & 9c_1 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{2}c_3 & = 1 \end{cases}$$

alors
$$c_1 = 0, c_2 = 0 \quad et \quad c_3 = 2.$$

D'où
$$x_n = 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

■

■ **Example 2.9** (**Racines complexes conjuguées**)
Considérons l'équation aux différences linéaire d'ordre 2.

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad n \geq 0, \tag{2.11}$$

avec $x_0 = 1, x_1 = 2$.
Son polynôme caractéristique associé est

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

L'équation (2.11) admet deux racines complexes

$$\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$$

la solution générale est alors
$$x_n = c_1(1+i)^n + c_2(1-i)^n.$$

Pour trouver les constantes c_1 et c_2 on résoudre le système

$$\begin{cases} x_0 = & c_1 + c_2 & = 1 \\ x_1 = & c_1(1+i) + c_2(1-i) & = 2 \end{cases}$$

alors

$$c_1 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \quad et \quad c_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)(1+i)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(1-i)^n, \\ &= \frac{1}{2}(1+i)^{n+1} + \frac{1}{2}(1-i)^{n+1}. \end{aligned}$$

En cordonnés polaires :

$$\alpha = r\cos\theta, \beta = r\sin\theta, r = \sqrt{2}, \theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\Pi}{4}.$$

donc

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\Pi}{4}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\Pi}{4}\right)\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\Pi}{4}\right) - i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\Pi}{4}\right)\right)^{n+1} \\ &= \frac{\sqrt{2}^{n+1}}{2}\left(\cos\left(\frac{(n+1)\Pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{(n+1)\Pi}{4}\right)\right) + \frac{\sqrt{2}^{n+1}}{2}\left(\cos\left(\frac{(n+1)\Pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{(n+1)\Pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}^{n+1}\left(\cos\left(\frac{(n+1)\Pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

■

■ **Example 2.10** (**Suite de Fibonacci**)

En 1202, Fibonacci s'intéresse au problème de croissance d'une population de lapins dans des circonstances idéales. Le problème est le suivant :

- On commence avec un nouveau né couple de lapins,
- Un lapin âgé d'un mois est capable de se reproduire,
- Un couple de lapins (en âge de se reproduire) donne naissance à un autre couple de lapins tous les mois,
- Les lapins ne meurent pas.

Fibonacci se posa la question suivante : combien y aura-t-il de couples de lapins après une année ? La figure (2.1) illustre l'évolution du nombre de couples de lapins au fur et à mesure des mois.

On remarque que la suite formée par les nombres de couples aprés chaque mois est la suivante :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$$

Cette suite de nombres est appelée suite de Fibonacci.

Définition 2.2.2 La suite de Fibonacci est la suite $\{F_n\}_{n\geq 0}$ telle que $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \tag{2.12}$$

pour tout $n \geq 0$.
- Les termes de cette suite sont appelés nombres de Fibonacci.

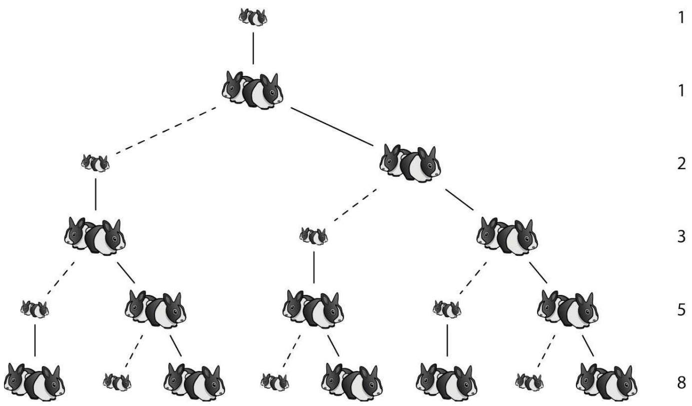


FIGURE 2.1 –

R La suite de Fibonacci est une équation aux différences linéaire a coefficients constantes homogène d'ordre 2.

Soit la suite de Fibonacci

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0, \text{ avec } F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1. \tag{2.13}$$

L'équation caractéristique de (2.13) est

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Ainsi, les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La solution générale de l'équation (2.13) s'écrit

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

utilisons les conditions initiales, on obtient

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

d'ou

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n. \tag{2.14}$$

Définition 2.2.3 La formule (2.14) est dite La formule de Binet.
Autrement dit :

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, n \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

avec

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ s'appelle le ***nombre d'or***.

■

2.2.2 Résolution de l'équation non homogène

Soit l'équation aux différences linéares non homogène a coefficients constants

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + \cdots + p_k x_n = g(n). \tag{2.16}$$

Le principe de résolution consiste à éliminer d'abord la fonction $g(n)$, et ensuite résoudre l'équation homogène. Une technique permettant d'éliminer plusieurs types de fonctions $g(n)$, est l'utilisation de l'opérateur d'avancement E.

Opérateur d'avancement

Définition 2.2.4 Étant donnée une suite de nombres entiers $f(n)$, l'opérateur d'avancement E est défini comme suit

$$\begin{aligned} f(n) &= c \text{ (une constante)} \Rightarrow E(f(n)) = c, \\ f(n) &\neq \text{ constante } \Rightarrow E(f(n)) = f(n+1). \end{aligned}$$

■ **Example 2.11**

$$\begin{aligned} f(n) &= 2 \Rightarrow E(f(n)) = 2. \\ f(n) &= (n+1)^2 \Rightarrow E(f(n)) = (n+2)^2. \end{aligned}$$

D'autres opérateurs peuvent aussi être crées en combinant l'opérateur E à lui-même ou à des constantes. Pour ce faire, on définit pour la constante c l'opérateur de même nom c comme suit.

$$c(f(n)) = c \times f(n).$$

La multiplication et l'addition d'opérateurs sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} (E_1 \times E_2) f(n) &= E_1(E_2(f(n))), \\ (E_1 + E_2) f(n) &= E_1(f(n)) + E_2(f(n)). \end{aligned}$$

■

R Il est facile de vérifier que :

1. L'addition et la multiplication d'opérateurs sont commutatives
$$(E_1+E_2)f(n) = (E_1+E_2)f(n),$$
$$(E_1 \times E_2)f(n) = (E_1 \times E_2)f(n).$$
2. L'addition et la multiplication d'opérateurs sont associatives
$$\begin{aligned} ((E_1+E_2)+E_3)f(n) &= (E_1+(E_2+E_3))f(n), \\ ((E_1 \times E_2 E_3))f(n) &= (E_1(E_2 \times E_3))f(n). \end{aligned}$$

■ **Example 2.12** Soit l'équation aux différences suivante :

$$x_{n+1} - x_n = n, \quad x_0 = 1.$$

On applique l'opérateur E, on obtient

$$\begin{aligned} (E-1)(n) &= E(n) - n = 1 \\ (E-1)(1) &= 0 \end{aligned}$$

par conséquent

$$(E-1)^2(x_{n+1}-x_n)=0$$

développant cette relation, on obtient

$$x_{n+3}-3x_{n+2}+3x_{n+1}-x_n=0$$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$$

les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1=1(triple)$$

la solution est de la forme

$$x_n=a_0+a_1n+a_2n^2$$

pour trouver les constants a_0,a_1,a_2 on va calculer x_1,x_2 on obtient

$$\begin{cases} x_0 &= & a_0 &= & 1 \\ x_1 &= & a_0+a_1+a_2 &= & 2 \\ x_2 &= & a_0+2a_1+4a_2 &= & 4 \end{cases}$$

alors $a_0=1$ et $a_1=\frac{1}{2},a_2=\frac{1}{2}$ donc la solution est :

$$x_n=1+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2.$$

■

■ **Example 2.13** Soit l'équation aus différences suivante :

$$x_{n+1}-n_n=n\times 2^n,\ avec\ x_0=0.$$

On applique l'opérateur E, on obtient

$$(E-2)^2(n\times 2^n)=0$$

par conséquent

$$(E-2)^2(x_{n+1}-x_n)=0$$

développant cette relation on obtient

$$x_{n+3}-5x_{n+2}+8x_{n+1}-4x_n=0.$$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$$\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0$$

les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1=1(simple),\lambda_2=2(double)$$

la solution est de la forme

$$x_n=(a_0+a_1n)2^n+a_2$$

pour trouver les constants a_0, a_1, a_2, on va calculer x_1, x_2 on obtient

$$\begin{cases} x_0 &= a_0 + a_2 &= 0 \\ x_1 &= 2a_0 + 2a_1 + a_2 &= 2 \\ x_2 &= 4a_0 + 8a_1 + a_2 &= 10 \end{cases}$$

alors $a_0 = -2$ et $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, donc la solution est :

$$x_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

■

Le tableau ci-dessous résume l'expression à employer pour éliminer quelques fonctions $g(n)$ dans les équations non homogènes. Dans le tableau qui suit, $P_k(n)$ et α représentent un polynôme en n de degré k et une valeur entière respectivement.

Fonction $g(n)$	Éliminateur correspondant
$g(n) = constante$	$(E-1)$
$g(n) = p_k(n)$	$(E-1)^{k+1}$
$g(n) = \alpha^n$	$(E-\alpha)$
$g(n) = \alpha^n p_k(n)$	$(E-\alpha)^{k+1}$

2.2.3 Analyse de la stabilité des solutions

Définition 2.2.5 On dit que'une solution $(\bar{x}_n)_{n\geq n_0}$ de l'équation (2.7) est **stable**, si pour toute autre solution $(x_n)_{n\geq n_0}$ de la même équation

$$e_n = x_n - \bar{x}_n, \quad n \geq n_0$$

est borné.

Définition 2.2.6 On dit qu'une solution $(\bar{x}_n)_{n\geq n_0}$ de l'équation (2.7) est **asymptotiquement stable**, si $(\bar{x}_n)_{n\geq n_0}$ est stable et pour toute autre solution $(x_n)_{n\geq n_0}$ de la même équation

$$\lim_{n\to+\infty} e_n = \lim_{n\to+\infty} x_n - \bar{x}_n = 0.$$

Définition 2.2.7 Une solution $(\bar{x}_n)_{n\geq n_0}$ de l'équation (2.7) est dite **instable** si elle est non stable.

Théorème 2.2.6
Une solution $(\bar{x}_n)_{n\geq n_0}$ de l'équation (2.7) est asymptotiquement stable si et seule- ment si les racines du npolunôme caractéristique sont à l'intérieur du dusc unité, c'est-à-dir

$$(\bar{x}_n)_{n\geq n_0} \textit{ est asymptotiquement stable} \Leftrightarrow |\lambda_i| < 1, i = 1, \ldots, s.$$

Démonstration. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les racines du polynôme caractéristique avec les multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_s$, tel que $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = k$. On a

$$x_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n,$$

et

$$\bar{x}_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} \bar{c}_{i,j} n^j \lambda_i^n,$$

donc

$$x_n - \bar{x}_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} (c_{i,j} - \bar{c}_{i,j}) n^j \lambda_i^n, \tag{2.17}$$

i) Si $|\lambda_1| < 1, i = 1, \dots, s$, le membre de droite dans (2.17) tend vers zero quand $n \to \infty$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} x_n - \bar{x}_n = 0.$$

ii) Inversement si

$$\lim_{n\to+\infty} x_n - \bar{x}_n = 0.$$

en supposant qu'il existe une racine λ_*. de module ≥ 1, le(s) terme(s) $n\lambda_*^n$ ne tend(s) pas vers zero. Contradiction

■

Théorème 2.2.7 Une solution $(\bar{x}_n)_{n\geq n_0}$ de l'équation (2.7) est stable si et seulement si les modules des racines du polynôme caractéristique sont inférieures ou égales à 1 avec ceux du module 1 sont des racines simples.

Démonstration. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les racines du polynôme caractéristique avec les multiplicités respectives $m_1, m_2, \dots, m_s$. Soit $(x_n)_{n\geq n_0}$ une autre solution de l'équation (2.7), alors

$$x_n - \bar{x}_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} (c_{i,j} - \bar{c}_{i,j}) n^j \lambda_i^n, \tag{2.18}$$

Il est clair que si n est finie la quantite (2.18) est bornee. Il nous reste a etudier le comportement de cette quantite quand $n \to +\infty$.

i) les termes qui correspondent à des racines de modules inférieur à 1 tends vers zéro et ceux qui correspondent à des racines de module 1 (donc simples) donnent une quantité bornée.

ii Inversement supposons que la quantité (2.18) est bornée. S'il existe une racine de $P(\lambda)$ de module supérieur à 1, alors (2.18) tend vers l'infini. Contradiction.

■

■ Example 2.14

Considérons l'équation suivant

$$x_{n+2} - \frac{5}{6} x_{n+1} + \frac{1}{6} x_n = 0 \tag{2.19}$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$P(\lambda) = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{3}).$$

Les racines de $P(\lambda)$ $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sont des modules inferiur à 1. donc les solution de (2.19) sont asymptotiquement stable. ■

■ **Example 2.15**
Considérons l'équation suivant

$$x_{n+3} - \frac{7}{2}x_{n+2} + \frac{7}{2}x_{n+1} - x_n = 0 \tag{2.20}$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \frac{7}{2}\lambda^2 + \frac{7}{2}\lambda - 1$$

Les racines de $P(\lambda)$ sont $\frac{1}{2}$, 2 et 1. On a $|2| \geq 1$ donc les solution de (2.20) n'est pas stable. ■

2.3 Exercices

Exercice 2.1
Donner la forme générale de la solution des deux équations aux différences suivants

$$x_{n+1} = a(n)x_n, \quad x_{n_0} = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{2.21}$$

$$y_{n+1} = a(n)y_n + g(n), \quad y_{n_0} = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{2.22}$$

où $a(n) \neq 0$, et $a(n)$ et $g(n)$ sont deux fonctions réels définies sur $\mathbb{N}_0$. ■

Solution -

1. On obtient la solution de l'équation (2.21) par itération

$$\begin{aligned} x_{n_0+1} &= a(n_0)x_{n_0} = a(n_0)x_0 \\ x_{n_0+2} &= a(n_0+1)x_{n_0+1} = a(n_0+1)a(n_0)x_0 \\ x_{n_0+3} &= a(n_0+2)x_{n_0+2} = a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)x_0 \end{aligned}$$

   Par indécation, on voir que

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n_0+n-n_0} \\ &= a(n-1)a(n-2)\cdots a(n_0)x_0. \end{aligned}$$

   Donc

$$x_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0. \tag{2.23}$$

2. De l'équation (2.22), on a

$$\begin{aligned} y_{n_0+1} &= a(n_0)y_0 + g(n_0) \\ x_{n_0+2} &= a(n_0+1)y_{n_0+1} + g(n_0+1) \\ &= a(n_0+1)a(n_0)y_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1) \\ x_{n_0+3} &= a(n_0+2)y_{n_0+2} + g(n_0+2) \\ &= a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)y_0 + a(n_0+2)a(n_0+1)g(n_0) + a(n_0+2)g(n_0+1) + g(n_0+2) \end{aligned}$$

   Par indécation on obtient que

$$y_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r). \tag{2.24}$$

On montre la relation (2.24) par reccurence, on supose q'elle vrais pour n. Donc d'aprés (2.22)

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= a(n)y_n + g(n)\\
&= a(n)\left(\left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r)\right) + g(n)\\
&= \left[\prod_{i=n_0}^{n} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n} a(i)\right] g(r) + g(n)\\
&= \left[\prod_{i=n_0}^{n} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n} a(i)\right] g(r) + \left[\prod_{i=n+1}^{n} a(i)\right] g(n)\\
&= \left[\prod_{i=n_0}^{n} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n}\left[\prod_{i=r+1}^{n} a(i)\right] g(r).
\end{aligned}$$

Alors la formule (2.24) est vrais pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

R Notez que nous avons adopté la notation $\prod_{i=n+1}^{n} a(i) = 1$ et $\sum_{i=n+1}^{n} a(i) = 0$.

Exercice 2.2

Trouvez les solutions des équations aux différences suivants :

(a) $x_{n+1} - (n+1)x_n = 0, \quad x_0 = c.$

(b) $x_{n+1} - 3^n x_n = 0, \quad x_0 = c.$

(c) $x_{n+1} - e^{2n} x_n = 0, \quad x_0 = c.$

(d) $x_{n+1} - \frac{n}{n+1} x_n = 0, \quad n \geq 1, \quad x_1 = c.$

Solution -

(a) De la formule (2.23), on

$$\begin{aligned}
x_n &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0\\
&= \left[\prod_{i=0}^{n-1} (i+1)\right] c\\
&= 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-2)(n-1)c\\
&= (n-1)!c.
\end{aligned}$$

(b) De la formule (2.23), on

$$\begin{aligned}
x_n &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0\\
&= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 3^i\right] c\\
&= 3 \times 3^2 \times 3^3 \times \cdots 3^{n-2} \times 3^{n-1} c\\
&= 3^{1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)} c\\
&= 3^{\frac{(n-1)n}{2}} c.
\end{aligned}$$

(c) De la formule (2.23), on

$$\begin{aligned}
x_n &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0 \\
&= \left[\prod_{i=0}^{n-1} e^{2i}\right] c \\
&= e^2 \times e^4 \times e^6 \times \cdots \times e^{2n-4} \times e^{2n-2} c \\
&= e^{2+4+6+\cdots+(2n-4)+(2n-2)} c \\
&= e^{(n-1)\frac{(2+2n-2)}{2}} c \\
&= e^{(n-1)n} c.
\end{aligned}$$

R $2+4+6+\cdots+(2n-4)+(2n-2)$ est la somme d'une suite arithmétique de reason 2 et permier terme égale 2.

(d) De la formule (2.23), on

$$\begin{aligned}
x_n &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0 \\
&= \left[\prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1}\right] c \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-1}{n} c \\
&= \frac{1}{n} c.
\end{aligned}$$

Exercice 2.3

Trouvez les solutions générles des équations aux différences suivants :

(a) $x_{n+1} - \frac{1}{2} x_n = 2, \quad x_0 = c.$

(b) $x_{n+1} - \frac{n}{n+1} x_n = 4, \quad x_1 = c.$

(c) $x_{n+1} = 2x_n + 3^n, \quad x(1) = 0.5.$

(d) $x_{n+1} = (n+1)x_n + 2^n (n+1)!, \quad x(0) = 1.$

Solution -

(a) De la formule (2.24), on a

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) \\
&= \left[\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\right] c + \sum_{r=0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} \frac{1}{2}\right] 2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n c + \sum_{r=0}^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-r}\right] 2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n c + \sum_{r=0}^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r-2}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n c + \sum_{r=0}^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} 2^r\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n c + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} (1+2+4+8+\cdots+2^{n-2}+2^{n-1})\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n c + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(1+2\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right)\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n c + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} (2^n-1) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n c + 4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= 4+(c-4)\left(\frac{1}{2}\right)^n .
\end{aligned}
$$

R $2+4+8+\cdots+2^{n-2}+2^{n-1}$ est la somme d'une suite géometrique de reason 2 et permier terme égale 2.

2^{me} **méthode :**

On applique l'opérateur $E-1$ (E est l'opérateur d'avancement) sur les deux membres de l'équation

$$(E-1)(x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n) \quad = \quad (E-1)(2)$$

$$x_{n+2}-\frac{3}{2}x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n = 0 \tag{2.25}$$

L'équation caractéristique associée est

$$\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}=0$$

qui a comme solutions $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

La solution générale est donc

$$x_n = c_1 1^n - c_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On utulisons les conditions initiales $x_0 = c, x_1 = \frac{1}{2}x_0+2 = \frac{1}{2}c+2$ on obtient le systèm

$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_1 = \frac{1}{2}c+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2 = c \\ c_1+\frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}c+2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 4, c_2 = c-4.$$

La solution qui satisfait les conditions initiales est donc

$$x_n = 4 + (c-4)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(b) De la formule (2.24), on a

$$\begin{aligned}
x_n &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r)\\
&= \left[\prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1}\right] c + \sum_{r=1}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} \frac{i}{i+1}\right] 4\\
&= \frac{1}{n}c + \sum_{r=1}^{n-1}\left[\frac{r+1}{n}\right]4\\
&= \frac{1}{n}c + \frac{4}{n}(2+3+4+\cdots+n-1+n)\\
&= \frac{1}{n}c + \frac{2}{n}(n-1)(n+2).
\end{aligned}$$

(c) De la formule (2.24), on a

$$\begin{aligned}
x_n &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r)\\
&= \left[\prod_{i=1}^{n-1} 2\right] c + \sum_{r=1}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} 2\right] 3^r\\
&= \frac{1}{2}2^{n-1} + 2^{n-1}\sum_{r=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^r\\
&= \frac{1}{2}2^{n-1} + 2^{n-1}\frac{3}{2}\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{\frac{3}{2}-1}\right)\\
&= 3^n - 5\times 2^{n-2}.
\end{aligned}$$

2^{me} **méthode :**

On applique l'opérateur $E-13$ (E est l'opérateur d'avancement) sur les deux membres de l'équation

$$(E-3)(x_{n+1}-2x_n) = (E-3)(3^n)$$

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0 \tag{2.26}$$

L'équation caractéristique associée est

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

qui a comme solutions $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

La solution générale est donc

$$x_n = c_1 2^n - c_2 3^n$$

On utulisons les conditions initiales $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2x_1 + 3 = 4$ on obtient le systèm

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 + 3c_2 = \dfrac{1}{2} \\ 4c_1 + 9c_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -\frac{5}{4}, c_2 = 1.$$

La solution qui satisfait les conditions initiales est donc

$$x_n = -5\times 2^{n-2} + 3^n.$$

(d) De la formule (2.24), on a

$$\begin{aligned}
x_n &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) \\
&= \left[\prod_{i=0}^{n-1}(i+1)\right] + \sum_{r=0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1}(i+1)\right] 2^r(r+1)! \\
&= n! + \sum_{r=0}^{n-1}[n! - (r+1)!]\, 2^r(r+1)! \\
&= n! + \sum_{r=0}^{n-1} n!2^r \\
&= n! + n!(1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}) \\
&= n! + n!(1+2\left(\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right)) \\
&= n!2^n.
\end{aligned}$$

Exercice 2.4
Considérons l'équation aux différences linéaire d'ordre 3

$$x_{n+3} - 7x_{n+1} + 6x_n = 0.$$

1. Vérifier que $1, (-3)^n$ et 2^n sont des solutions de cette équation.
2. Déterminer le Casoratien des solutions donner dans 1.

■

Solution -

1. On a $x_n = 1$ est un solution car 1-7+6=0. D'autre part $x_n = (-3)^n$ est un solution, en effet

$$(-3)^{n+3} - 7(-3)^{n+1} + 6(-3)^n = (-3)^n[-27+21+6] = 0.$$

Finalement $x_n = 2^n$ est un solution car

$$2^{n+3} - 7\times 2^{n+1} + 6\times 2^n = 2^n[8-14+6] = 0.$$

2. On a

$$\begin{aligned}
W(n) &= det\begin{pmatrix} 1 & (-3)^n & 2^n \\ 1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{pmatrix} \\
\begin{matrix} L_2 - L_1 \\ = \\ L_3 - L_1 \end{matrix} &\; \begin{vmatrix} 1 & (-3)^n & 2^n \\ 0 & (-3)^{n+1} - (-3)^n & 2^{n+1} - 2^n \\ 0 & (-3)^{n+2} - (-3)^n & 2^{n+2} - 2^n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -4(-3)^n & 2^n \\ 8(-3)^n & 3\times 2^n \end{vmatrix} \\
&= -20(2)^n(-3)^n.
\end{aligned}$$

Exercice 2.5
Pour les équations aux différences suivantes et leurs solutions associée :
i) Déterminer si ces solutions sont libres.
ii) Trouver, si possible, en utilisant uniquement les solutions données, la Solution général.
a) $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 0, \quad 1, n, n^2.$
b) $x_{n+2} + x_n = 0, \quad \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$

c) $x_{n+3}+x_{n+2}-8x_{n+1}-12x_n=0, \quad 3^n,(-2)^n,(-2)^{n+3}$.
d) $x_{n+4}-16x_n=0, \quad 2^n,n2^n,n^22^n$.

Solution -
a) On a
$$W(n)=det\begin{pmatrix}1 & n & n^2\\ 1 & n+1 & (n+1)^2\\ 1 & n+2 & (n+2)^2\end{pmatrix}$$
donc
$$W(0)=det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}=2\neq 0$$
Alors $\left\{1,n,n^2\right\}$ est libre, donc forme un ensemble fondamentale.
La soluton générel donnée par
$$x_n=a_1+a_2n+a_3n^2.$$
b) On a
$$W(n)=det\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)\end{pmatrix}$$
donc
$$W(0)=det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1\neq 0$$
Alors $\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$ est libre, donc forme un ensemble fondamentale.
La soluton générel donnée par
$$x_n=a_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+a_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$
c) On a
$$W(n)=det\begin{pmatrix}3^n & (-2)^n & (-2)^{n+3}\\ 3^{n+1} & (-2)^{n+1} & (-2)^{n+4}\\ 3^{n+2} & (-2)^{n+2} & (-2)^{n+5}\end{pmatrix}$$
donc
$$W(0)=det\begin{pmatrix}1 & 1 & -8\\ 3 & -2 & 16\\ 9 & 4 & -32\end{pmatrix}=0.$$
Alors $\left\{3^n,(-2)^n,(-2)^{n+3}\right\}$ est liée, donc ne forme pas un ensemble fondamentale.
d) On a
$$W(n)=det\begin{pmatrix}2^n & n2^n & n^22^n\\ 2^{n+1} & (n+1)2^{n+1} & (n+1)^22^{n+1}\\ 2^{n+2} & (n+2)2^{n+2} & (n+2)^22^{n+2}\end{pmatrix}$$
donc
$$W(0)=det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 4\\ 4 & 8 & 16\end{pmatrix}=0$$
Alors $\left\{2^n,n2^n,n^22^n\right\}$ est liée, donc ne forme pas un ensemble fondamentale.

Exercice 2.6
Résoudre les équations aux différences suivantes :
(a) $x_{n+3}-4x_{n+2}+5x_{n+1}-2x_n=0, \quad x_0=0, x_1=1, x_2=0.$
(b) $x_{n+2}-7x_{n+1}+16x_n-12x_{n-1}=0, \quad x_0=0, x_1=1, x_2=1.$
(c) $x_{n+2}+x_n=0, \quad x_0=0, x_1=1.$

Solution -
(a) L'équation caractéristique associée est

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$$

qui a comme solutions $\lambda_1=2$ (simple) et $\lambda_2=1$ (double).
La solution générale est donc

$$x_n=c_1 2^n+c_2+c_3 n$$

On utulisons les conditions initiales $x_0=0, x_1=1, x_2=0$ on obtient le systèm

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ 2c_1+c_2+c_3=1 \\ 4c_1+c_2+2c_3=0 \end{cases} \Rightarrow c_1=-2, c_2=2, c_3=3.$$

La solution qui satisfait les conditions initiales est donc

$$x_n=-2^{n+1}+3n+2.$$

(b) L'équation caractéristique associée est

$$\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12=0$$

qui a comme solutions $\lambda_1=3$ (simple) et $\lambda_2=2$ (double).
La solution générale est donc

$$x_n=c_1 3^n+(c_2+c_3 n)2^n$$

On utulisons les conditions initiales $x_0=0, x_1=1, x_2=1$ on obtient le systèm

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ 3c_1+2c_2+2c_3=1 \\ 9c_1+4c_2+8c_3=1 \end{cases} \Rightarrow c_1=-3, c_2=3, c_3=2.$$

La solution qui satisfait les conditions initiales est donc

$$x_n=-3^{n+1}+(3+2n)2^n$$

(c) L'équation caractéristique associée est

$$\lambda^2+1=0$$

qui a comme solutions $\lambda_1=i$ et $\lambda_2=-i$.
La solution générale est donc

$$x_n=c_1 i^n-c_2 i^n$$

La forme polaire des solutions est

$$x_n = c_1 \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

On utulisons les conditions initiales $x_0 = 0, x_1 = 1$ on obtient le systèm

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = 0 \\ c_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 0.$$

La solution qui satisfait les conditions initiales est donc

$$x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 2.7

Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci défine par

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$, avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

■

Solution -

D'aprés la formule de Binet on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}}{\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^{n+1}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right)}{\alpha^n\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right)}{\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\right)} \end{aligned}$$

on a $|\beta| < |\alpha|$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha.$$

Exercice 2.8

Soit $\{F_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci. Montrer que

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad \forall n \geq 1. (\texttt{L'identité de Cassini})$$

$$F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n = (-1)^n F_r, \quad \forall n \geq 1, (\texttt{L'identité d'Ocagne}) r \in \mathbb{N}.$$

Solution -

I) Par reccurence :

- Pour $n=1$ on a
$$F_0F_2-F_1^2=-1=(-1)^1$$
donc la propsition est vrais pour $n=1$.
- Supposons que la proposition est vrais pour n, c'es-à-dir
$$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$$
et montrons la proposition pour $n+1$. On a
$$\begin{aligned} F_nF_{n+2}-F_{n+1}^2 &= F_n(F_{n+1}+F_n)-F_{n+1}(F_n+F_{n-1}) \\ &= F_n^2-F_{n+1}F_{n-1} \\ &= -(F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2)=-(-1)^n=(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$
- Donc
$$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n, \quad \forall n\geq 1.$$

II)

- Pour $n=1$ on a
$$F_{1+r}F_2-F_{r+2}F_1=F_{1+r}-F_{r+2}=-(F_{2+r}-F_{r+1})=-F_r=(-1)^1F_r$$
donc la propsition est vrais pour $n=1$.
- Supposons que la proposition est vrais pour n, c'es-à-dir
$$F_{n+r}F_{n+1}-F_{n+r+1}F_n=(-1)^nF_r$$
et montrons la proposition pour $n+1$. On a
$$\begin{aligned} F_{n+r+1}F_{n+2}-F_{n+r+2}F_{n+1} &= F_{n+r+1}(F_{n+1}+F_n)-(F_{n+r+1}+F_{n+r})F_{n+1} \\ &= F_{n+r+1}F_{n+1}+F_{n+r+1}F_n-F_{n+r+1}F_{n+1}-F_{n+r}F_{n+1} \\ &= F_{n+r+1}F_n-F_{n+r}F_{n+1} \\ &= -(F_{n+r}F_{n+1}-F_{n+r+1}F_n)=-(-1)^nF_r=(-1)^{n+1}F_r. \end{aligned}$$
- Donc
$$F_{n+r}F_{n+1}-F_{n+r+1}F_n=(-1)^nF_r, \quad \forall n\geq 1, r\in\mathbb{N}.$$

Exercice 2.9

Soit $\{H_n\}_{n\geq 0}$ la suite d'Horadam définie par
$$H_{n+2}=pH_{n+1}+qH_n, \quad H_0=0, H_1=1.$$

1. Donner la forme des solutions (Formule de Benet) de la suite d'Horadam. (on note les racines par α et β, avec $\alpha>\beta$).
2. Montrer que
$$H_{n-1}H_{n+1}-H_n^2=-(-q)^n, \quad \forall n\geq 2.(\texttt{L'identité de Cassini}) \tag{2.27}$$

Solution -

1. ***Donnons la forme des solutions***
   L'équation caractéristique de (2.35) est

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0$$

Ainsi, les racines caractéristiques sont

$$\alpha = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}, \quad \beta = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

La solution générale de l'équation (2.35) s'écrit

$$H_n = A\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)^n + B\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}\right)^n$$

Utilisons les conditions initiales, on obtient

$$A = \frac{1}{\alpha-\beta}, \quad B = -\frac{1}{\alpha-\beta}$$

Donc

$$H_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta}.$$

2. Par reccurence :
   - Pour $n = 2$ on a

$$H_1H_3 - H_2^2 = q = -(-q)^{2-1}$$

donc la propsition est vrais pour $n = 2$.

   - Supposons que la proposition est vrais pour n, c'es-à-dir

$$H_{n-1}H_{n+1} - H_n^2 = -(-q)^n$$

et montrons la proposition pour $n+1$. On a

$$\begin{aligned} H_nH_{n+2} - H_{n+1}^2 &= H_n(pH_{n+1}+qH_n) - H_{n+1}(pH_n+qH_{n-1}) \\ &= qH_n^2 - qH_{n+1}H_{n-1} \\ &= -q(H_{n-1}H_{n+1} - H_n^2) = q(-q)^n = -(-q)^{n+1}. \end{aligned}$$

   - Donc

$$H_{n-1}H_{n+1} - H_n^2 = -(-q)^n, \quad \forall n \geq 2.$$

Exercice 2.10

Résoudre l'équations aux différences suivants

(a)

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = n^2, \quad x_0 = 0, x_1 = 1. \tag{2.28}$$

(b)

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n+1. \tag{2.29}$$

(c)

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 5\times 3^n. \tag{2.30}$$

(d)

$$x_{n+2} + 8x_{n+1} + 12x_n = e^n. \tag{2.31}$$

Solution -

(a) Application l'opérateur E au terme n^2 comme suit :

$$\begin{aligned} E(n^2) &= (n+1)^2 = n^2+2n+1 \\ (E-1)(n^2+2n+1) &= ((n+1)^2+2(n+1))+1-n^2-2n-1 = (2n+3) \\ (E-1)(2n+3) &= 2(n+1)-2n+3-3 = 2 \\ (E-1)(2) &= 2-2 = 0: \end{aligned}$$

Par conséquent, en appliquant l'expression $(E-1)^3$ aux deux membres de l'équation (2.32) , on obtient :

$(E-1)^3 x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n) = (E-1)^3 n^2.$

Développant cette relation, on obtient :

$x_{n+5} - 7x_{n+4} + 16x_{n+3} - 16x_{n+2} + 7x_{n+)} - x_n = 0$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$\lambda^5 - 7\lambda^4 + 16\lambda^3 - 16\lambda^2 + 7\lambda - 1 = 0$

les racines caractéristiques sont

$\lambda_1 = 1(triple), \lambda_2 = 2-\sqrt{3}(simple)$ et $\lambda_3 = 2+\sqrt{3}(simple)$

la solution est de la forme

$x_n = (a_0 + a_1 n + a_2 n^2) + a_3(2-\sqrt{3})^n + a_4(2+\sqrt{3})^n$

pour trouver les constants a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 on va calculer x_2, x_3, x_4, on obtient

$$\begin{cases} x_0 &= & a_0 + a_3 + a_4 &= 0 \\ x_1 &= & a_0 + a_1 + a_2 + (2-\sqrt{3})a_3 + (2+\sqrt{3})a_4 &= 1 \\ x_2 &= & a_0 + 2a_1 + 4a_2 + (7-4\sqrt{3})a_3 + (7+4\sqrt{3})a_4 &= 4 \\ x_3 &= & a_0 + 3a_1 + 9a_2 + (26-15\sqrt{3})a_3 + (26+15\sqrt{3})a_4 &= 16 \\ x_4 &= & a_0 + 4a_1 + 16a_2 + (97-56\sqrt{3})a_3 + (97+56\sqrt{3})a_4 &= 64 \end{cases}$$

alors $a_0 = -1, a_1 = 1, a_2 = \frac{-1}{2}, a_3 = \frac{6+\sqrt{3}}{12}, a_4 = \frac{6+\sqrt{3}}{12}$, donc la solution est :

$$x_n = -1 + n - \frac{n^2}{2} + \frac{6+\sqrt{3}}{12}(2-\sqrt{3})^n + \frac{6-\sqrt{3}}{12}(2+\sqrt{3})^n$$

(b) En appliquant l'expression $(E-1)^2$ aux deux membres de l'équation (3.14) , on obtient :

$(E-1)^2(x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n) = (E-1)^2(n+1).$

Développant cette relation, on obtient :

$x_{n+4} - 7x_{n+3} + 17x_{n+2} - 17x_{n+1} + 6x_n = 0$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$\lambda^4 - 7\lambda^3 + 17\lambda^2 - 17\lambda + 6 = 0$

les racines caractéristiques sont

$\lambda_1 = 1(triple), -1(simple)$

la solution est de la forme

$x_n = (a_0 + a_1 n + a_2 n^2) + a_3(-1)^n.$

(c) En appliquant l'expression $(E-3)$ aux deux membres de l'équation (3.3) , on obtient :

$(E-3)(x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n) = (E-1)(5\times 3^n).$

Développant cette relation, on obtient :

$x_{n+3} - 2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

les racines caractéristiques sont

$\lambda_1 = 1(double), -6(simple)$

la solution est de la forme

$x_n = (a_0 + a_1 n) + a_3(-6)^n.$

(d) En appliquant l'expression $(E-e)$ aux deux membres de l'équation, on obtient :

$(E-e)(x_{n+2} + 8x_{n+1} + 12x_n) = (E-e)^2(e^n).$

Développant cette relation, on obtient :

$$x_{n+3}+(8-e)x_{n+2}+(12-8e)x_{n+1}-12ex_n=0$$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$$\begin{aligned}\lambda^3+(8-e)\lambda^2+(12-8e)\lambda-12e &= 0\\ (\lambda-e)(\lambda+2)(\lambda+6) &= 0\end{aligned}$$

les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1=e(simple),-2(simple),-6(simple)$$

la solution est de la forme

$$x_n=(a_0)e^n+a_1(-2)^n+a_2(-6)^n.$$

Exercice 2.11

Soit l'équation aux différences linéare d'ordr 3

$$x_{n+3}-(\alpha+\beta+1)x_{n+2}+(\alpha+\beta+\alpha\beta)x_{n+1}-\alpha\beta x_n=0, \quad n\geq 0 \tag{2.32}$$

avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

- Donner les valeurs de α et β pour les solutions de l'équation (2.32) soit stable.

Solution -

Le polynome caractéristique de l'équation (2.32) est

$$P(\lambda)=\lambda^3-(\alpha+\beta+1)\lambda^2+(\alpha+\beta+\alpha\beta)\lambda-\alpha\beta$$

son racines sont $1,\alpha$ et β.

- Si $\alpha\neq\beta$ les trois racines sont simple, donc d'aprés le théorème (2.2.7) il suffi de

$$|\alpha|\leq 1, |\beta|\leq 1.$$

- Si $\alpha=\beta$ la racine α est double, donc d'aprés (2.2.7) il suffi de

$$|\alpha|=|\beta|<1.$$

Exercice 2.12

Soient $\{L_n\}_{n\geq 0}$ et $\{F_n\}_{n\geq 0}$ les suites de Lucas et Fibonacci définies par

$$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n, \quad L_0=2, L_1=1 \qquad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, \quad F_0=0, F_1=1.$$

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{L_{n+1}}{F_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{F_{n+1}}{L_n}$.
2. Montrer que

$$L_nF_{n+1}=F_{2n+1}+(-1)^n. \tag{2.33}$$

$$L_{m+n}F_n+L_mF_{n-1}=L_{m+n}, \quad n,m\in\mathbb{N} \tag{2.34}$$

Solution -

1. ***Calculons*** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{L_{n+1}}{F_n}$ ***et*** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{F_{n+1}}{L_n}$ **:**

   On a
$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},\quad L_n=\alpha^n+\beta^n$$
   Donc
$$\begin{aligned}\frac{L_{n+1}}{F_n}=\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}} &= \frac{\alpha^{n+2}+\alpha\beta^{n+1}-\beta\alpha^{n+1}-\beta^{n+2}}{\alpha^n-\beta^n}\\ &= \frac{\alpha^2\left(1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+2}\right)}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}\end{aligned}$$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$, On obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{L_{n+1}}{F_n}=\sqrt{5}\alpha.$

   Dautre part
$$\begin{aligned}\frac{F_{n+1}}{L_n}=\frac{\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}}{\alpha^n+\beta^n} &= \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n-\beta\alpha^n-\beta^{n+1}}\\ &= \frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}\end{aligned}$$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$, On obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{F_{n+1}}{L_n}=\frac{\sqrt{5}}{\alpha}.$

2. • Soit $n\in\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}L_nF_{n+1} &= (\alpha^n+\beta^n)\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right),\\ L_nF_{n+1} &= \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{2n+1}-\beta^{n+1}\alpha^n+\beta^n\alpha^{n+1}-\beta^{2n+1}),\\ &= \left(\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}\right)+\frac{\alpha^n\beta^n}{\alpha-\beta}(\alpha-\beta),\\ &= F_{2n+1}+(-1)^n.\quad (\text{Car}\quad \alpha^n\beta^n=(-1)^n).\end{aligned}$$
   • Soient $n,m\in\mathbb{N}$
$$\begin{aligned}L_{m+1}F_n+L_mF_{n-1} &= (\alpha^{m+1}+\beta^{m+1})\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)+(\alpha^m+\beta^m)\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right),\\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{n+m+1}-\beta^n\alpha^{m+1}-\beta^{n+m+1}+\beta^{m+1}\alpha^n\alpha^{n+m-1}\\ &- \alpha^m\beta^{n-1}+\beta^m\alpha^{n-1}-\beta^{n+m-1}),\\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^{n+m}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\beta^{n+m}\left(\left(-\frac{1}{\beta}\right)-\beta\right)\right),\\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha-\beta)(\alpha^{n+m}+\beta^{n+m}),\\ &= L_{m+n}.\end{aligned}$$

Exercice 2.13

Soit $\{L_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Lucas définie par
$$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n,\quad L_0=2,L_1=1.$$

1. Donner la forme des solutions (Formule de Benet) de la suite de Lucas.

(on note les racines par α et β, avec $\alpha > \beta$).

2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{L_{n+r}}{L_n}$, avec $r \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que

$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = 5(-1)^n, \quad \forall n \geq 1. \tag{2.35}$$

$$L_{n+k} - (-1)^k L_{n-k} = 5F_nF_k, \quad \forall n,k \in N \tag{2.36}$$

avec $\{F_n\}_{n\geq 0}$ est la suite de Fibonacci.

Solution -

1. L'équation caractéristique de (2) est

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

La racines sont : $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Donc la solution est

$$L_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$$

De $L_0 = 2, L_1 = 1$, on obtient que $c_1 = c_2 = 1$. Alors

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.37}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{L_{n+r}}{L_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^{n+r} + \beta^{n+r}}{\alpha^n + \beta^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^{n+r}\left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+r}\right)}{\alpha^n\left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)} \\
&= \alpha^r.
\end{aligned}$$

3. **a)** ***Méthode 1 :***

$$\begin{aligned}
L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} &= (\alpha^n + \beta^n)^2 - (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\
&= (\alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n - \alpha^{2n} - \alpha^{n-1}\beta^{n+1} - \beta^{n-1}\alpha^{n+1} - \beta^{2n} \\
&= -(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \\
&= (-1)^n(\alpha - \beta)^2 \\
&= 5(-1)^n.
\end{aligned}$$

Méthode 2 :

Par reccurence :

- Pour $n = 1$ on a

$$L_1^2 - L_0L_2 = -5 = 5(-1)^1$$

donc la propsition est vrais pour $n = 1$.

- Supposons que la proposition est vrais pour n, c'es-à-dir

$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = 5(-1)^n$$

et montrons la proposition pour $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
L_{n+1}^2 - L_nL_{n+2} &= L_{n+1}(L_n + L_{n-1}) - L_n(L_{n+1} + L_n) \\
&= -(L_n^2 - L_{n+1}L_{n-1}) \\
&= -5(-1)^n = 5(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

- Donc

$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = 5(-1)^n, \quad \forall n \geq 1.$$

b On a

$$\begin{aligned}
L_{n+k} - (-1)^k L_{n-k} &= \alpha^{n+k} + \beta^{n+k} - (-1)^k(\alpha^{n-k} + \beta^{n-k}) \\
&= \alpha^{n+k} + \beta^{n+k} - \alpha^n(-\alpha)^{-k} + \beta^n(-\beta)^{-k} \\
&= \alpha^{n+k} + \beta^{n+k} - \alpha^n\beta^k - \beta^n\alpha^k \\
&= \alpha^n(\alpha^k - \beta^k) - \beta^n(\alpha^k - \beta^k) \\
&= (\alpha^n - \beta^n)(\alpha^k - \beta^k) \\
&= (\alpha-\beta)^2\left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) \\
&= 5F_nF_k,
\end{aligned}$$

Exercice 2.14

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1 + x_n}, \quad n \geq 0. \tag{2.38}$$

avec $\alpha, x_0 \in]0, +\infty[$.

1. Montrer que le changement de variable $x_n = \frac{1}{y_n}$ ramène l'équation (3.16) à l'équation

$$y_{n+1} = ay_n + b, \quad n \geq 0. \quad (\textit{Donner la valeur de a et b}) \tag{2.39}$$

2. Résoudre l'équation (2.39) (discuter les cas $\alpha = 1$, $\alpha \neq 1$).
3. Déduire la solution de l'équation (3.16).

Solution -

1. ***Vérifions que l'équation*** (3.16) ***équivalent l'équation*** (2.39) **:**

   En posant $x_n = \dfrac{1}{y_n}$:

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{\alpha\frac{1}{y_n}}{1 + \frac{1}{y_n}}$$

   Donc

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha}y_n + \frac{1}{\alpha}}$$

   D'où

$$y_{n+1} = ay_n + b, \quad n \geq 0. \quad (a = b = \frac{1}{\alpha})$$

2. ***Résoudrons l'équation*** (2.39) **:**

   L'équation (2.39) est une éqution aux différences linéare acoefficients constants d'ordre 1, d'aprés (2.24) on a

   - Si $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
y_n &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) \\
&= \left[\prod_{i=0}^{n-1} 1\right] y_0 + \sum_{r=0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1} 1\right] \\
&= y_0 + n.
\end{aligned}$$

- Si $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} y_n &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r) \\ &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha}\right] y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} \frac{1}{\alpha}\right] \frac{1}{\alpha} \\ &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-r-1}\right] \frac{1}{\alpha} \\ &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \alpha^r \\ &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \left(y_0 + \left(\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}\right)\right). \end{aligned}$$

3. ***Déduirons la solution de l'équation*** (3.16)***. :***

- Si $\alpha = 1$ On a

$$x_n = \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0 + n}$$

Donc

$$x_n = \frac{x_0}{n x_0 + 1}.$$

- Si $\alpha \neq 1$ On a

$$x_n = \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \left(\frac{1}{x_0} + \left(\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}\right)\right)}$$

Donc

$$x_n = \frac{\alpha^n (\alpha - 1) x_0}{(\alpha^n - 1) x_0 + \alpha - 1}.$$

3. Equations aux différences non linéaires

3.1 Définitions de Stabilité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I^{k+1} \to I$ est une fonction continue.

Définition 3.1.1 Une équation aux différences d'ordre $(k+1)$.

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \cdots, \tag{3.1}$$

avec les valeurs initiales. $x_0, x_{-1}, \cdots, x_{-k} \in I$, est dite non linéaire s'il n'est pas de la forme (2.1).

■ **Example 3.1**

1. L'équation
$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2 + x_{n-3}}$$
est une équation aux différences non linéaire d'ordre 4 .
2. L'équation
$$x_{n+1} = 2x_{n-1} + x_{n-2}^2$$
est une équation aux différences non linéaire d'ordre 3 .

■

Définition 3.1.2 Un point $\bar{x} \in I$ est dit point d'équilibre pour l'équation (3.1) si

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}),$$

autrement dit

$$x_n = \bar{x}, \quad \forall n \geq -k.$$

■ **Example 3.2**

1. Soit $\overline{x} \in I \subset \mathbb{R}$ un point d'équilibre de l'équation aux différences
$$x_{n+1} = \frac{2}{-1+x_{n-2}}$$
alors
$$\overline{x} = \frac{2}{-1+\overline{x}}$$
donc $\overline{x} = 2$ ou $\overline{x} = -1$.
2. Soit $\overline{x} \in I \subset \mathbb{R}$ un point d'équilibre de l'équation aux différences
$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1+x_{n-4}}$$
alors
$$\overline{x} = \frac{\alpha}{1+\overline{x}}$$
donc $\overline{x} = \dfrac{-1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$ ou $\overline{x} = \dfrac{-1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}$.

■

Définition 3.1.3 Une solution $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ de l'équation (3.1) est dite ***éventuelleement périodique*** de période $p \in \mathbb{N}_0$ si
$$\exists N \geq -k; \quad x_{n+p} = x_n.$$
Si $N = -k$, on dit que la solution est ***périodique*** de période p .

■ **Example 3.3**

1. Soit l'équation aux différences
$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 0.$$
On a
$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{1}{x_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x_n}} = x_n. \end{aligned}$$
Donc $\{x(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ est périodique de période 2.
2. Soit l'équation aux différences
$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n x_{n-1}}, \quad n \geq 0.$$
On a
$$\begin{aligned} x_{n+3} &= \frac{1}{x_{n+2}x_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}x_n}\frac{1}{x_n x_{n-1}}} \\ &= x_{n+1}x_n^2 x_{n-1} \\ &= \frac{1}{x_n x_{n-1}} x_n^2 x_{n-1} = x_n. \end{aligned}$$
Donc $\{x(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ est périodique de période 3.

■

Définition 3.1.4 Un intervalle $J \subseteq I$ est dit intervalle invariant pour l'équation (3.1) si

$$x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in J \Rightarrow x_n \in J, \quad n > 0.$$

3.1.1 Stabilité des équations aux différences non linéaires

Définition 3.1.5 Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre de l'équation (3.1).

1. $\bar{x}$ est dit ***localement stable*** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I : \mid x_{-k} - \bar{x} \mid + \cdots + \mid x_0 - \bar{x} \mid < \delta$$

alors

$$\mid x_n - \bar{x} \mid < \varepsilon, \forall n \geq -k.$$

2. $\bar{x}$ est dit ***localement asymptotiquement stable*** si
•$\bar{x}$ est localement stable,
•$\exists \gamma > 0, \forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I : \mid x_{-k} - \bar{x} \mid + \cdots + \mid x_0 - \bar{x} \mid < \gamma$ alors

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}.$$

3. $\bar{x}$ est dit ***globalement attractif*** si

$$\forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I, \lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}.$$

4. $\bar{x}$ est dit ***globalement asymptotiquement stable*** si
•$\bar{x}$ est localement stable,
•$\bar{x}$ est globalement attractif.
5. Le point $\bar{x}$ est dit ***instable*** s'il est non localement stable.

Définition 3.1.6 On appelle ***équation aux différences linéaire associée*** à l'équation (3.1) l'équation

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \cdots + p_k y_{n-k} \tag{3.2}$$

avec

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}), i = 0, \cdots, k.$$

et

$$f : \begin{array}{ccl} I^k & \longrightarrow & I \\ (u_1, \ldots, u_k) & \longmapsto & f(u_1, \ldots, u_k). \end{array}$$

et

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - \cdots - p_k.$$

son polynôme caractéristique associé .

■ **Example 3.4**

1. Soit l'équation aux différences d'ordre 2

$$x_{n+1} = \frac{2}{-1 + x_{n-1}}, \quad n \geq 0 \tag{3.3}$$

On definie la fonction

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} & \\ & (x,y) & \longmapsto f(x,y) = \dfrac{2}{-1+y} \end{array}$$

Les points d'équilibre de l'équation (3.3) sont $\bar{x}=2$ et $\bar{x}=-1$.
équation aux différences linéaire associée a l'équation (3.3) autor du point d'équilibre $\bar{x}=-1$ est

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1}$$

avec

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{x}) = 0, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{x}) = -\frac{1}{2}$$

donc l'équation aux différences linéaire associée a l'équation (3.3) autor du point d'équilibre $\bar{x}=-1$ est

$$y_{n+1} = -\frac{1}{2} y_{n-1}.$$

2. Soit l'équation aux différences d'ordre 2

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n x_{n-1} - x_{n-2}}, \quad n \geq 0 \tag{3.4}$$

On definie la fonction

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} & \\ & (x,y,z) & \longmapsto f(x,y) = \dfrac{2x}{xy-z} \end{array}$$

Les points d'équilibre de l'équation (3.3) sont $\bar{x}=2$ et $\bar{x}=-1$.
équation aux différences linéaire associée a l'équation (3.4) autor du point d'équilibre $\bar{x}=2$ est

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + p_2 y_{n-2}$$

avec

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{x},\bar{x}) = -1, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{x},\bar{x}) = 2, \quad p_2 = \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x},\bar{x},\bar{x}) = 1$$

donc l'équation aux différences linéaire associée a l'équation (3.3) autor du point d'équilibre $\bar{x}=2$ est

$$y_{n+1} = -y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2}.$$

■

3.1.2 Stabilité par linéarisation

Théorème 3.1.1

1. Si toutes les racines du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée sont dans le disque unité ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre $\bar{x}$ de l'équation (3.1) est asymptotiquement stable.
2. Si au moins une racine du polynôme caractéristique de l'équation aux différences linéaire associée a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre $\bar{x}$ de l'équation (3.1) est instable.

Démonstration. Soit l'équation aux différences (3.1)

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \cdots,$$

et la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} I^k & \longrightarrow I \\ (u_1,\ldots,u_k) & \longmapsto f(u_1,\ldots,u_k). \end{array}$$

Si en faire un devlopement de taylor de la fonction f autor du point d'quilbre $(\bar{x},\bar{x},\cdots,\bar{x})$ on obtient

$$x_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial u_0}(\bar{x},\bar{x},\cdots,\bar{x})y_n + \frac{\partial f}{\partial u_1}(\bar{x},\bar{x},\cdots,\bar{x})y_{n-1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_k}(\bar{x},\bar{x},\cdots,\bar{x})y_{n-k} + o(x-\bar{x})$$

Qunad $n \to +\infty$, $o(x-\bar{x}) \to 0$, donc

$$x_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \cdots + p_k y_{n-k}$$

et le polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0\lambda^k - \ldots - p_k$$

Donc d'après the Theorème (2.2.6)

$$(\bar{x}_n)_{n\geq n_0} \textit{ est asymptotiquement stable} \Leftrightarrow |\lambda_i| < 1, i = 1,\ldots,s.$$

■

Théorème 3.1.2 — Théorème de Clark . Une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotique de l'équation (3.1) et

$$|\, p_0 \,| + |\, p_1 \,| + \cdots + |\, p_k \,| < 1.$$

Pour montrer cette théorème, on utilisant le Théorème de Rouché.

Théorème 3.1.3 — Théorème de Rouché. Soient $f(z)$, $g(z)$ deux fonctions holomorphes dans un ouvert Ω du plan complexe $\mathbb{C}$, et soit K un compact contenu dans Ω. Si on a

$$|g(z)| < |f(z)|, \ \forall\, z \in \partial K,$$

alors le nombre de zéros de $f(z)+g(z)$ dans K est égal au nombre de zéros de $f(z)$ dans K.

Démonstration. (Théorème de Clark) Soit

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0\lambda^k - p_1\lambda^{k-1} - \cdots - p_k$$

le polynôme caractéristique de l'équation linéaire associé de l'équation (3.1). Soient f et g deux fonctions complexes définies par

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1}, \quad g(\lambda) = p_0\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_k.$$

On a pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$

$$\begin{aligned} |g(\lambda)| &= |p_0\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_k| \\ &\leq |p_0| + |p_1| + \cdots + |p_k| \\ &< 1. \end{aligned}$$

C'est-à-dire
$$|g(\lambda)| < |f(\lambda)|.$$
Alors par le Théorème de Rouché $f(\lambda)$ et $f(\lambda)+g(\lambda)$ ont le même nombres de zéros $(k+1)$ à l'intérieur du disque unité. Ainsi les racines du polynôme $P(\lambda)$ sont de modules inférieures à 1, et le résultat découle du Théorème (2.2.6).

■

■ Example 3.5
Soit l'équation aux différences
$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{\alpha+\beta x_n} \quad n = 0,1,\dots \tag{3.5}$$
$\alpha,\beta > 0$ et $x_{-1},x_0 \in [0,+\infty[$.
Etudier le comportemnt du point d'équilibre zéro.
Les points d'équilibre d'équation (3.5) ***:***
Soit x un point d'équilbre de (3.5) donc
$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{\bar{x}}{\alpha+\beta\bar{x}} \quad &\Leftrightarrow \quad x(\alpha+\beta\bar{x}) = \bar{x} \\ &\Leftrightarrow \quad \beta\bar{x}^2 + (\alpha-1)\bar{x} = 0 \end{aligned}$$

- Si $\alpha > 1$: Les points d'équilibres sont : $\bar{x} = 0$ et $\bar{x} = \dfrac{1-\alpha}{\beta}$.
- Si $\alpha \leq 1$: Le seul point d'équilibre est : $\bar{x} = 0$.

L'équation linéare associée autor du point d'équilibre $\bar{x} = 0$ ***:***
Soit la fonction
$$\begin{aligned} f: \quad [0,+\infty[^2 \quad &\longrightarrow [0,+\infty[\\ (x,y) \quad &\longmapsto \frac{y}{\alpha+\beta x}. \end{aligned}$$
On a
$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y) = \frac{-\beta y}{(\alpha+\beta x)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = \frac{1}{(\alpha+\beta x)}.$$
D'où
$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x} f(0,0) = 0, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y} f(0,0) = \frac{1}{\alpha}.$$
Donc L'équation linéare associée à l'équation (3.5) autor du point d'équilibre $\bar{x} = 0$ est
$$y_{n+1} = \frac{1}{\alpha} y_{n-1}. \tag{3.6}$$
Le polynôme caractéristique de (3.6) est
$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{\alpha}.$$
Les racines de $P(\lambda)$ sont : $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.
On a
$$|\lambda_i| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$$
Donc
- Si $\alpha > 1$:$\bar{x} = 0$ est assymptotiquement stable.
- Si $\alpha < 1$:$\bar{x} = 0$ est instable.

■

3.2 Théorèmes de convergences

On donne maintenant quelque théorèmes de convergence pour les équations aux différences d'ordre 2.

Théorème 3.2.1 Considérons l'équation aux différences définie par

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}),\ n = 0, 1, \ldots \tag{3.7}$$

avec

$$g : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]\ , a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que g est une fonction continue telle que

1) $g(x,y)$ est croissante par rapport à $x \in [a,b]$ pour chaque $y \in [a,b]$ et $g(x,y)$ et décroissante par rapport à $y \in [a,b]$ pour chaque $x \in [a,b]$,

2) Si (m,M) est une solution du système

$$\begin{cases} m = g(m,M) \\ M = g(M,m) \end{cases}$$

donc $m = M$.

Alors l'équation (3.7) admet un seul point d'équilibre $\bar{x}$ et toute solution de l'équation (3.7) converge vers $\bar{x}$.

Démonstration. ■

Théorème 3.2.2 Considérons l'équation aux différences définie par

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}),\ n = 0, 1, \ldots \tag{3.8}$$

avec

$$g : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]\ , a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que g est une fonction continue telle que

1) $g(x,y)$ est décroissante par rapport à $x \in [a,b]$ pour chaque $y \in [a,b]$ et $g(x,y)$ et croissante par rapport à $y \in [a,b]$ pour chaque $x \in [a,b]$,

2) Si (m,M) est une solution du système

$$\begin{cases} m = g(M,m) \\ M = g(m,M) \end{cases}$$

donc $m = M$.

Alors l'équation (3.8) admet un seul point d'équilibre $\bar{x}$ et toute solution de l'équation (3.8) converge vers $\bar{x}$.

Démonstration. ■

■ **Example 3.6** Considérons l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + x_{n-1}}{x_n + 2x_{n-1}} \tag{3.9}$$

et $x_{-1}, x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

On a
$$x_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2x_n+x_{n-1}}{x_n+2x_{n-1}}-\frac{1}{2}=\frac{3x_n}{2(x_n+2x_{n-1})}\geq 0.$$
donc
$$x_n\geq\frac{1}{2}.$$
$$x_{n+1}-2=\frac{2x_n+x_{n-1}}{x_n+2x_{n-1}}-2=\frac{-3x_n}{(x_n+2x_{n-1})}\leq 0.$$
donc
$$x_n\leq 2.$$
Donc $x_n\in\left[\frac{1}{2},2\right]$

Soit la fonction
$$f:\begin{array}{ccc}\left[\frac{1}{2},2\right]^2 & \longrightarrow & \left[\frac{1}{2},2\right]\\ (x,y) & \longmapsto & \frac{2x+y}{x+2y}.\end{array}$$
On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{3y}{(x+2y)^2}\geq 0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-3x}{(x+2y)^2}\leq 0$$
donc f est croissante par rapport à x et décroissante par rapport à y

Soit $m,M\in\left[\frac{b}{a},\frac{a}{b}\right]$ tels que
$$\begin{cases}m=f(m,M)\\ M=f(M,m)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{2m+M}{m+2M}\\ M=\dfrac{2M+m}{M+2m}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Mm=\dfrac{M(2m+M)}{m+2M}\\ Mm=\dfrac{m(2M+m)}{M+2m}\end{cases}$$
Donc
$$\frac{M(2m+M)}{m+2M}=\frac{m(2M+bm)}{M+2m}$$
$$\begin{aligned}(M^3-m^3)+4(M^2m-m^2M)-4(M^2m-m^2M)&=0\\ (M-m)\left[m^2+M^2+mM\right]&=0\end{aligned}$$

On a $(m^2+M^2)+mM>0$ alors $M-m=0$, d'aprés le Théorème (3.2.1) , l'équation (3.9) admet un seul ponit d'équlibre $\bar{x}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$. ■

3.3 Des équations aux différences non linéaires qui se ramènent à des équations aux différences linéaires

Soit l'équations aux différences non linéaire
$$x_{n+1}x_n+p(n)x_{n+1}+q(n)x_n=0,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{3.10}$$
avec p et q sont des fonctions reéls et $x_n\neq 0,\forall n\in\mathbb{N}_0$.

Posons $y_n=\dfrac{1}{x_n}$, on obtient
$$\frac{1}{y_{n+1}}\frac{1}{y_n}+\frac{p(n)}{y_{n+1}}+\frac{q(n)}{y_n}=0$$

On multiplier les deux membres par $y_{n+1}y_n$, on obtient

$$q(n)y_{n+1}+p(n)y_n+1=0$$

qui est une équation aux différences linéaire.

Soit maintnant l'équations aux différences non linéaire non homogène

$$x_{n+1}x_n+p(n)x_{n+1}+q(n)x_n=g(n), \quad n=0,1,2,\dots \tag{3.11}$$

avec p,q et g sont des fonctions reéls et $x_n\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}_0$.

. . . .

■ **Example 3.7**

Soit l'équation aux différences non linéaire d'ordre 1

$$x_{n+1}=\frac{\alpha x_n}{1+\beta x_n}, \quad n\geq 0 \tag{3.12}$$

avec $\alpha,\beta>0$, $\alpha\neq 1$ et $x_0=1$.

On a

$$\begin{aligned} x_{n+1}(1+\beta x_n) &= \alpha x_n \\ x_{n+1}+\beta x_{n+1}x_n-\alpha x_n &= 0 \\ x_{n+1}x_n+\frac{1}{\beta}x_{n+1}-\frac{\alpha}{\beta}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Posons $y_n=\frac{1}{x_n}$, on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{\beta}y_{n+1}+\frac{1}{\beta}y_n+1 &= 0 \\ y_{n+1}-\frac{1}{\alpha}y_n &= \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

En appliquant l'expression $(E-1)$ aux deux membres de l'équation (3.13) , on obtient :

$$(E-1)\left(y_{n+1}-\frac{1}{\alpha}y_n\right)=(E-1)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Développant cette relation, on obtient :

$$y_{n+2}-\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)y_{n+1}+\frac{1}{\alpha}y_n=0$$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$$\lambda^2-\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\lambda+\frac{1}{\alpha}=0$$

les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1=1(simple),\frac{1}{\alpha}(simple)$$

la solution est de la forme

$$y_n=a_1+a_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n.$$

Donc

$$x_n = \frac{1}{y_n} = \frac{1}{a_1 + a_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n}$$

On utulisons les conditions initiales $x_0 = 1$, on obtient le systèm

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = \dfrac{\alpha}{1+\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 + \dfrac{1}{\alpha} a_2 = \dfrac{1+\beta}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{\beta}{\alpha - 1}, a_2 = \frac{\alpha - 1 - \beta}{\alpha - 1}.$$

La solution qui satisfait les conditions initiales est donc

$$x_n = \frac{(\alpha - 1)\alpha^n}{\beta(\alpha^n - 1) + (\alpha - 1)}.$$

■

3.4 Exercices

Exercice 3.1

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n-1}(x_n + 1)}, \quad n \geq 0. \tag{3.14}$$

avec les conditions initilaes x_0 et x_{-1}.

1. Détrminer les points d'équilibres de l'équation (3.14).
2. Montrer que la solution de l'équation (3.14) est périodique de période 5.
3. Déduire la forme de solution de l'équation (3.14).

■

Solution -

1. ***Déterminons les points d'équilibres*** **:**
   Soit $\overline{x} \in \mathbb{R}$ un point d'équilibre de l'équation (3.14), donc
   $$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\overline{x}}{\overline{x}(\overline{x}+1)} \\ \overline{x}(\overline{x}^2 + \overline{x} - 1) &= 0 \end{aligned}$$
   Alors les points d'équilbres de l'équation (3.14) sont 0, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
2. ***Montrons que la solution de l'équation*** (3.14) ***est périodique de période 5 :***

   On a
   $$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{x_{n+1}}{x_n(1 + x_{n+1})} = \frac{\dfrac{x_n}{x_{n-1}(x_n+1)}}{x_n\left(1 + \dfrac{x_n}{x_{n-1}(x_n+1)}\right)} \\ &= \frac{x_n}{x_{n-1}(x_n+1) + x_n}. \\ x_{n+3} &= \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}(1 + x_{n+2})} = \frac{\dfrac{x_n}{x_{n-1}(x_n+1)+x_n}}{\dfrac{x_n}{x_{n-1}(x_n+1)}\left(1 + \dfrac{x_n}{x_{n-1}(x_n+1)+x_n}\right)} \\ &= \frac{x_{n-1}}{x_n(1 + x_{n-1})}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_{n+4} &= \frac{x_{n+3}}{x_{n+2}(1+x_{n+3})} = \frac{\dfrac{x_{n-1}}{x_n(1+x_{n-1})}}{\dfrac{x_n}{x_{n-1}(x_n+1)+x_n}\left(1+\dfrac{x_{n-1}}{x_n(1+x_{n-1})}\right)} \\
&= x_{n-1}. \\
x_{n+5} &= \frac{x_{n+4}}{x_{n+3}(1+x_{n+4})} = \frac{x_{n-1}}{\dfrac{x_{n-1}}{x_n(1+x_{n-1})}(1+x_{n-1})} \\
&= x_n.
\end{aligned}
$$

Donc $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation (3.14) est périodique de période 5.

3. ***Déduirons la forme de solution de l'équation* (3.14) *:***
   On a

$$
x_0, \quad x_1 = \frac{x_0}{x_{-1}(1+x_0)}, \quad x_2 = \frac{1}{x_{-1}+x_0x_{-1}+x_0}, \quad x_3 = \frac{x_{-1}}{x_0(1+x_{-1})}, \quad x_4 = x_{-1}.
$$

et $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation (3.14) est périodique de période 5, donc

$$
\begin{aligned}
x_{5n} &= x_0, \\
x_{5n+1} &= \frac{x_0}{x_{-1}(1+x_0)}, \\
x_{5n+2} &= \frac{1}{x_{-1}+x_0x_{-1}+x_0}, \\
x_{5n+3} &= \frac{x_{-1}}{x_0(1+x_{-1})}, \\
x_{5n+4} &= x_{-1}.
\end{aligned}
$$

Exercice 3.2
Soit l'équation aux différences

$$
x_{n+1} = \frac{x_{n-1}+1}{x_nx_{n-1}-1}, \quad n \geq 0. \tag{3.15}
$$

avec les conditions initilaes x_0 et x_{-1}.
1. Montrer que la solution de l'équation (3.15) est périodique de période 5.
2. Déduire la forme de solution de l'équation (3.15).

Solution -

1. ***Montrons que la solution de l'équation* (3.15) *est périodique de période 5 :***

   On a

$$
\begin{aligned}
x_{n+2} &= \frac{x_n+1}{x_{n+1}x_n-1} = \frac{x_n+1}{\dfrac{x_{n-1}+1}{x_nx_{n-1}-1}x_n-1} \\
&= x_nx_{n-1}-1. \\
x_{n+3} &= \frac{x_{n+1}+1}{x_{n+2}x_{n+1}-1} = \frac{\dfrac{x_{n-1}+1}{x_nx_{n-1}-1}+1}{(x_nx_{n-1}-1)\dfrac{x_{n-1}+1}{x_nx_{n-1}-1}-1} \\
&= \frac{1+x_n}{(x_nx_{n-1}-1)}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
x_{n+4} &= \frac{x_{n+2}+1}{x_{n+3}x_{n+2}-1} = \frac{x_n x_{n-1}-1+1}{\dfrac{1+x_n}{(x_n x_{n-1}-1)x_n}(x_n x_{n-1}-1)-1} \\
&= x_{n-1}. \\
x_{n+5} &= \frac{x_{n+3}+1}{x_{n+4}x_{n+3}-1} = \frac{\dfrac{1+x_n}{(x_n x_{n-1}-1)}+1}{x_{n-1}\dfrac{1+x_n}{(x_n x_{n-1}-1)}-1} \\
&= x_n.
\end{aligned}$$

Donc $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation (3.15) est périodique de période 5.

2. ***Déduirons la forme de solution de l'équation* (3.15) *:***

   On a
   $$x_0, \quad x_1 = \frac{x_{-1}+1}{x_0 x_{-1}-1}, \quad x_2 = x_0 x_{-1}-1, \quad x_3 = \frac{1+x_0}{x_0 x_{-1}-1}, \quad x_4 = x_{-1}.$$
   et $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation (3.14) est périodique de période 5, donc
   $$\begin{aligned}
   x_{5n} &= x_0, \\
   x_{5n+1} &= \frac{x_{-1}+1}{x_0 x_{-1}-1}, \\
   x_{5n+2} &= x_0 x_{-1}-1, \\
   x_{5n+3} &= \frac{1+x_0}{x_0 x_{-1}-1}, \\
   x_{5n+4} &= x_{-1}.
   \end{aligned}$$
   $n = 0, 1, \ldots.$

Exercice 3.3

Soit l'équation aux différences non linéaire

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{x_n x_{n-1}-1}, \quad n \geq 0. \tag{3.16}$$

avec les valeurs initiales x_0, x_{-1}..

1. Détrminer les points d'équilibres de l'équation (3.16).
2. Montrer que la solution de l'équation (3.16) est périodique de période 3.
3. Déduire la forme de solution de l'équation (3.16).

Solution -

1. ***Déterminons les points d'équilibres* :**

   Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}$ un point d'équilibre de l'équation (3.16), donc
   $$\begin{aligned}
   \bar{x} &= \frac{\bar{x}+\bar{x}}{\bar{x}^2-1} \\
   \bar{x}(\bar{x}^2-3) &= 0
   \end{aligned}$$
   Alors les points d'équilbres de l'équation (3.14) sont $0, \sqrt{3}$ et$-\sqrt{3}$.

2. ***Montrons que la solution de l'équation* (3.16) *est périodique de période 3 :***

   On a
   $$\begin{aligned}
   x_{n+2} &= \frac{x_{n+1}+x_n}{x_{n+1}x_n-1} = \frac{\dfrac{x_n+x_{n-1}}{x_n x_{n-1}-1}+x_n}{\dfrac{x_n+x_{n-1}}{x_n x_{n-1}-1}x_n-1} = \frac{x_{n-1}(1+x_n^2)}{1+x_n^2} = x_{n-1}. \\
   x_{n+3} &= \frac{x_{n+2}+x_{n+1}}{x_{n+2}x_{n+1}-1} = \frac{x_{n-1}+\dfrac{x_n+x_{n-1}}{x_n x_{n-1}-1}}{x_{n-1}\dfrac{x_n+x_{n-1}}{x_n x_{n-1}-1}-1} = \frac{x_n(x_{n-1}^2+1)}{x_{n-1}^2+1} = x_n.
   \end{aligned}$$

Donc $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation (3.16) est périodique de période 3.

3. ***Déduirons la forme de solution de l'équation*** (3.16) **:**
   On a

$$,x_{-1}, \quad x_0, \quad x_1 = \frac{x_0 + x_{-1}}{x_0 x_{-1} - 1}$$

et $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation (3.16) est périodique de période 3, donc

$$\begin{aligned} x_{3n-1} &= x_{-1}, \\ x_{3n} &= x_0, \\ x_{3n+1} &= \frac{x_0 + x_{-1}}{x_0 x_{-1} - 1}. \end{aligned}$$

Exercice 3.4 Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}}, \quad n \geq 0 \tag{3.17}$$

avec les valeurs initilaes x_{-1}, x_0 sont des nombres réels non nules.

1. Détrminer les points d'équilibres de l'équation (3.17).
2. Montrer que la solution de l'équation (3.17) est périodique de période p (déterminer la valeur de p).
3. Les points d'équilibres de l'équation (3.17) sont-ils globalemnet stable ?
4. Déduire la forme de solution de l'équation (3.17).

■

Solution -

1. ***Déterminons les points d'équilibres de l'équation*** (3.17) **:**
   Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^*$ un point d'équilibre de l'équation, donc

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\bar{x}} \\ \bar{x}^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

   Alors les points d'équilbres de l'équation sont $\bar{x} = 1$ et $\bar{x} = -1$.

2. ***Montrons que la solution de l'équation*** (3.17) ***est périodique :***
   On a

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{1}{x_n}, \\ x_{n+3} &= \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{x_{n-1}}} = x_{n-1}, \\ x_{n+4} &= \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{\frac{1}{x_n}} = x_n. \end{aligned}$$

   Donc $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation est périodique de période p=4.
3. On a $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation est périodique donc les points d'équlibres ne sont pas globalemnet stable.
4. ***Déduirons la forme de solution de l'équation*** (3.17) **:**
   On a

$$x_{-1}, \quad x_0, \quad x_1 = \frac{1}{x_{-1}}, \quad x_2 = \frac{1}{x_0}$$

et $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation est périodique de période 4, donc

$$\begin{aligned} x_{4n-1} &= x_{-1}, \\ x_{4n} &= x_0, \\ x_{4n+1} &= \frac{1}{x_{-1}}, \\ x_{4n+2} &= \frac{1}{x_0}. \end{aligned}$$

Exercice 3.5 Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_{n-1}}, \quad n \geq 0 \tag{3.18}$$

avec les valeurs initilaes x_{-1}, x_0 sont des nombres réels non nules.

1. Détrminer les points d'équilibres de l'équation (3.18).
2. Montrer que la solution de l'équation (3.18) est périodique de période p (déterminer la valeur de p).
3. Les points d'équilibres de l'équation (3.18) sont-ils globalemnet stable ?
4. Déduire la forme de solution de l'équation (3.18).

Solution -

1. ***Déterminons les points d'équilibres de l'équation*** (3.18) **:**
   Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^*$ un point d'équilibre de l'équation, donc
   $$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1+\bar{x}}{\bar{x}} \\ \bar{x}^2 - \bar{x} - 1 &= 0. \end{aligned}$$
   Alors les points d'équilbres de l'équation sont $\bar{x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\bar{x} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
2. ***Montrons que la solution de l'équation*** (3.18) ***est périodique :***
   On a
   $$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{1+x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\dfrac{1+x_n}{x_{n-1}}}{x_n} = \frac{x_n + x_{n-1} + 1}{x_n x_{n-1}}, \\ x_{n+3} &= \frac{1+x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{1+\dfrac{x_n+x_{n-1}+1}{x_n x_{n-1}}}{\dfrac{x_n+x_{n-1}+1}{x_n x_{n-1}}} = \frac{x_{n-1}+1}{x_n}, \\ x_{n+4} &= \frac{1+x_{n+3}}{x_{n+2}} = \frac{1+\dfrac{x_{n-1}+1}{x_n}}{\dfrac{x_n+x_{n-1}+1}{x_n x_{n-1}}} = x_{n-1}, \\ x_{n+5} &= \frac{1+x_{n+4}}{x_{n+3}} = \frac{1+x_{n-1}}{\dfrac{x_{n-1}+1}{x_n}} = x_n. \end{aligned}$$
   Donc $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation est périodique de période p =5.
3. On a $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation est périodique donc les points d'équlibres ne sont pas globalemnet stable.
4. ***Déduirons la forme de solution de l'équation*** (3.18) ***:***

On a

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1+x_0}{x_{-1}},\\
x_2 &= \frac{1+x_1}{x_0} = \frac{1+\dfrac{1+x_0}{x_{-1}}}{x_0} = \frac{x_{-1}+x_0+1}{x_{-1}x_0},\\
x_3 &= \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{1+\dfrac{x_{-1}+x_0+1}{x_{-1}x_0}}{\dfrac{1+x_0}{x_{-1}}} = \frac{x_{-1}+1}{x_0}.
\end{aligned}
$$

et $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation (3.18) est périodique de période 5, donc

$$
\begin{aligned}
x_{5n-1} &= x_{-1},\\
x_{5n} &= x_0,\\
x_{5n+1} &= \frac{1+x_0}{x_{-1}},\\
x_{5n+2} &= \frac{x_{-1}+x_0+1}{x_{-1}x_0},\\
x_{5n+3} &= \frac{x_{-1}+1}{x_0}.
\end{aligned}
$$

Exercice 3.6 Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n x_{n-1} x_{n-2}}, \quad n \geq 0 \tag{3.19}$$

avec les valeurs initilaes x_{-2}, x_{-1}, x_0 sont des nombres réels non nules.

1. Détrminer les points d'équilibres de l'équation (3.19).
2. Montrer que la solution de l'équation (3.19) est périodique de période p (déterminer la valeur de p).
3. Les points d'équilibres de l'équation (3.19) sont-ils globalemnet stable ?
4. Déduire la forme de solution de l'équation (3.19).

Solution -

1. ***Déterminons les points d'équilibres de l'équation*** (3.19) **:**
   Soit $\overline{x} \in \mathbb{R}^*$ un point d'équilibre de l'équation, donc
   $$
   \begin{aligned}
   \overline{x} &= \frac{1}{\overline{x}^3}\\
   \overline{x}^4 - 1 &= 0.
   \end{aligned}
   $$
   Alors les points d'équilbres de l'équation sont $\overline{x} = 1$ et $\overline{x} = -1$.

2. ***Montrons que la solution de l'équation*** (3.19) ***est périodique :***

On a

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= \frac{1}{x_{n+1}x_nx_{n-1}} = \frac{1}{\frac{1}{x_nx_{n-1}x_{n-2}}x_nx_{n-1}} = x_{n-2},\\
x_{n+3} &= \frac{1}{x_{n+2}x_{n+1}x_n} = \frac{1}{x_{n-2}x_n\frac{1}{x_nx_{n-1}x_{n-2}}} = x_{n-1},\\
x_{n+4} &= \frac{1}{x_{n+3}x_{n+2}x_{n+1}} = \frac{1}{x_{n+3}x_{n+2}\frac{1}{x_nx_{n-1}x_{n-2}}} = x_n.
\end{aligned}$$

Donc $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation est périodique de période p=4.

3. On a $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation (3.19) est périodique donc les points d'équlibres ne sont pas globalemnet stable.
4.
5. ***Déduirons la forme de solution de l'équation* (3.19) *:***
   On a
   $$x_1 = \frac{1}{x_0x_{-1}x_{-2}},$$
   et $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation (3.19) est périodique de période 4, donc
   $$\begin{aligned}
   x_{4n-2} &= x_{-2},\\
   x_{4n-1} &= x_{-1},\\
   x_{4n} &= x_0\\
   ,x_{4n+1} &= \frac{1}{x_0x_{-1}x_{-2}}.
   \end{aligned}$$

Exercice 3.7 Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{2+x_{n-1}}{2+x_n}, \quad n \geq 0 \tag{3.20}$$

avec $x_{-1}, x_0 > 0$.

Montrer que le point d'équilbre positive de l'équation (3.20) est localement assymptotiquement stable. ■

Solution -
Les points d'équilibre d'équation* (3.20) *:
Soit x un point d'équilbre de (3.20) donc

$$\begin{aligned}
\overline{x} = \frac{2+\overline{x}}{2+\overline{x}} &\Leftrightarrow \overline{x}^2 + 2\overline{x} = 2 + \overline{x}\\
&\Leftrightarrow \overline{x}^2 + \overline{x} - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Donc le seul point d'équilibre positive est : $\overline{x} = 1$.
L'équation linéaire associée de léquation* (3.20) *autour du* $\overline{x} = 1$ *:
Soit la fonction

$$\begin{aligned}
f: \quad [0,+\infty[^2 &\longrightarrow [0,+\infty[\\
(x,y) &\longmapsto \frac{2+y}{2+x}.
\end{aligned}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2+y}{(2+x)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(2+x)}.$$

D'où

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{3}, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{3}.$$

Donc L'équation lineáre associée à l'équation (3.20) autor du point d'équilibre $\bar{x} = 1$ est

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n\frac{1}{3}y_{n-1} \tag{3.21}$$

On a $|p_0| + |p_1| = \dfrac{2}{3} < 1$, d'aprés le Théorème de Clark $\bar{x} = 1$ est localement asymptotiquement stable.

Exercice 3.8 Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n \geq 0. \tag{3.22}$$

avec α, x_0 et $x_{-1} \in]0, +\infty[$.

1. Déterminer les points d'équilibres de l'équation (3.38).
2. Étudier la stabilité locale asymptotique du point d'équilibre pour $\alpha > 1$.
3. Que direz vous pour le cas $0 < \alpha < 1$.

Solution -

1. ***Déterminons les points d'équilibres de l'équation* (3.38) *:***
   Soit $\bar{x} \in]0, +\infty[$ un point d'équilibre de l'équation (3.38), donc
   $$\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha + \frac{\bar{x}}{\bar{x}} \\ \bar{x} &= 1 + \alpha. \end{aligned}$$
2. ***Étudions la stabilité locale asymptotique du point d'équilibre :***

   Soit la fonction
   $$\begin{aligned} f: \quad]0, +\infty[^2 &\longrightarrow]0, +\infty[\\ (x, y) &\longmapsto \alpha + \frac{y}{x}. \end{aligned}$$
   On a
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(x)}.$$
   D'où
   $$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(1+\alpha, 1+\alpha) = \frac{-1}{1+\alpha}, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(1+\alpha, 1+\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}.$$
   On a $|p_0| + |p_1| = \frac{2}{1+\alpha} < 1$ car $\alpha > 1$, d'après le théorème de Clark $\bar{x} = 1 + \alpha$ est asymptotiquement stable.
3. Dans la cas $0 < \alpha < 1$, on a $|p_0| + |p_1| > 1$ donc en peut rien dire puisque la condition de Clrak est suffisante est pas nécessaire.

Exercice 3.9 Soit l'équation aux différences de type max

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, x_{n-1}\right\}, \quad n \geq 0 \tag{3.23}$$

avec x_{-1}, x_0 sont les valeurs initiales.

I) Supposons que $x_{-1}, x_0 > 1$.

1. Montrer que la solution de l'équation (3.23) est périodique de période 2.

2. Déduire la forme de solution de l'équation (3.23).

I) Supposons que $0 < x_{-1} < 1, x_0 > 1$.

1. Montrer que la solution de (3.23) est éventuellemnet périodique de période 2.
2. Déduire la forme de solution de l'équation (3.23).

Solution -

I 1. ***Montrons que la solution de l'équation est périodique* (3.23) *:***

On a $x_{-1}, x_0 > 1$, donc

$$\begin{aligned} x_1 &= \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1} \\ x_2 &= \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0 \\ x_3 &= \max\left\{\frac{1}{x_1}, x_1\right\} = x_{-1} \\ x_4 &= \max\left\{\frac{1}{x_2}, x_2\right\} = x_0 \end{aligned}$$

Par indecation $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation (3.23) est périodique de période 2.

2. ***Déduirons la forme de solution de l'équation* (3.23) *:***

La forme de solutions de l'équation est

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= x_{-1}, \quad n \geq 0 \\ x_{2n} &= x_0, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

II) 1. ***Montrons que la solution de l'équation* (3.23) *est éventuellemnet périodique :***

On a $0 < x_{-1} < 1, x_0 > 1$, donc

$$\begin{aligned} x_1 &= \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}} \\ x_2 &= \max\left\{\frac{1}{x_0}, x_0\right\} = x_0 \\ x_3 &= \max\left\{\frac{1}{x_1}, x_1\right\} = \max\left\{x_{-1}, \frac{1}{x_{-1}}\right\} = \frac{1}{x_{-1}} \\ x_4 &= \max\left\{\frac{1}{x_2}, x_2\right\} = x_0 \end{aligned}$$

Par indecation $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ la solution de l'équation (3.23) est éventuellemnet périodique de période 2.

2. ***Déduirons la forme de solution de l'équation* (3.23) *:***

La forme de solutions de l'équation est

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= \frac{1}{x_{-1}}, \quad n \geq 1 \\ x_{2n} &= x_0, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Exercice 3.10

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{r x_{n-1}}{1 + x_n}, \quad n \geq 0. \tag{3.24}$$

avec les conditions initilaes x_0 et x_{-1} sont positives et $r > 0$.

1. Détrminer les points d'équilibres de l'équation (3.24).
2. Donner une condition nicéssaire et sufisante sur r, pour le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ soit asymptotiquement stable .
3. Montrer que $r < 1$, alors $\bar{x} = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Solution -

1. ***Détrminons les points d'équilibres de l'équation* (3.24) *:***
   Soit $\bar{x} \in [0, +\infty[$ un point d'équilibre de l'équation (3.24), donc
   $$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{r\bar{x}}{1+\bar{x}} \\ \bar{x}(\bar{x}+1-r) &= 0 \end{aligned}$$
   - Si $r \leq 1$ le seul point d'équlibre est $\bar{x} = 0$.
   - Si $r > 1$ les points d'équlibres sont : $\bar{x} = 0$ et $\bar{x} = r - 1$.
2. Soit la fonction
   $$\begin{aligned} f: \quad [0,+\infty[^2 &\longrightarrow [0,+\infty[\\ (x,y) &\longmapsto \frac{ry}{1+x}. \end{aligned}$$
   On a
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-ry}{(1+x)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{r}{(1+x)}.$$
   D'où
   $$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = r.$$
   Donc L'équation linéare associée à l'équation (3.24) autor du point d'équilibre $\bar{x} = 0$ est
   $$y_{n+1} = r y_{n-1} \tag{3.25}$$
   donc l'équation caractéristique est
   $$\lambda^2 - r = 0$$
   son racine sont $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{r}$, alors $\bar{x} = 0$ est asymptotiquement stable ssi $r < 1$.
3. ***Montrons que*** $\bar{x} = 0$ ***est globalement asymptotiquement stable :***
   On a $\bar{x} = 0$ est asymptotiquement stable, il suffit de prouver que $\bar{x} = 0$ est globalement attractif, c'est à dir
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$
   On a
   $$\begin{aligned} 0 \leq x_{n+1} = \frac{r x_{n-1}}{1+x_n} &\leq r x_{n-1} \\ &\leq r^2 x_{n-3} \\ &\leq r^3 x_{n-5} \\ &\vdots \\ &\leq r^{\frac{n}{2}} x_0 \end{aligned}$$
   on a $\lim r^{\frac{n}{2}} x_0 = 0$ (car $r < 1$), donc
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Exercice 3.11

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \quad n \geq 0 \tag{3.26}$$

Montrer que la forme de la solution de l'équation (3.35) est donner par

$$x_{2n-1} = \frac{F_{2n-1}+F_{2n-2}x_0}{F_{2n}+F_{2n-1}x_0}, \quad x_{2n} = \frac{F_{2n}+F_{2n-1}x_0}{F_{2n+1}+F_{2n}x_0}, n \geq 1$$

avec $\{F_n\}_{n\geq 0}$ est la suite de Fibonacci définie par

$$F_{n+2} = F_{n+1}+F_n, F_0 = 0, F_1 = 1.$$

Solution -

Par récurrence : On a

$$x_1 = \frac{1}{1+x_0} = \frac{F_1+F_0x_0}{F_2+F_1x_0}$$

Donc la proposition est vrais pour $n = 1$. Supposons que vrais pour $n-1$. c'est-à-dire,

$$x_{2n-3} = \frac{F_{2n-3}+F_{2n-4}y_0}{F_{2n-2}+F_{2n-3}y_0}, \quad x_{2n-2} = \frac{F_{2n-2}+F_{2n-3}x_0}{F_{2n-1}+F_{2n-2}x_0},$$

D'après l'équation (3.35)

$$\begin{aligned}
x_{2n-1} &= \frac{1}{1+x_{2n-2}} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{F_{2n-2}+F_{2n-3}x_0}{F_{2n-1}+F_{2n-2}x_0}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{F_{2n-1}+F_{2n-2}x_0+F_{2n-2}+F_{2n-3}x_0}{F_{2n-1}+F_{2n-2}x_0}} \\
&= \frac{F_{2n-1}+F_{2n-2}x_0}{F_{2n-1}+F_{2n-2}+(F_{2n-2}+F_{2n-3})x_0}.
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$x_{2n-1} = \frac{F_{2n-1}+F_{2n-2}y_0}{F_{2n}+F_{2n-1}y_0}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
x_{2n} &= \frac{1}{1+x_{2n-1}} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{F_{2n-1}+F_{2n-2}x_0}{F_{2n}+F_{2n-1}x_0}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{F_{2n}+F_{2n-1}x_0+F_{2n-1}+F_{2n-2}x_0}{F_{2n}+F_{2n-1}x_0}} \\
&= \frac{F_{2n}+F_{2n-1}x_0}{F_{2n}+F_{2n-1}+(F_{2n-1}+F_{2n-2})x_0}.
\end{aligned}$$

Donc

$$x_{2n} = \frac{F_{2n} + F_{2n-1}x_0}{F_{2n+1} + F_{2n}x_0}.$$

Exercice 3.12

Considérons l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + bx_{n-1}}{bx_n + ax_{n-1}} \tag{3.27}$$

et $a, b, x_{-1}, x_0 \in]0, +\infty[$, $a > b$.

1. Vérifier que $x_n \in]0, +\infty[, n = 1, 2, \ldots$
2. Montrer que l'équation (3.27) admet un seul point d'équilibre, qu'on le note $\bar{x}$ (donner sa valeur).
3. Montrer que si $\frac{2(a-b)}{a+b} < 1$, alors $\bar{x}$ est localement asymptotiquement stable.
4. Montrer que $x_n \in \left[\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right], n = 1, 2, \ldots$
5. Soit $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$. Étudier la monotonie de la fonction f par rapport au deux variables.
6. Montrer que si $\frac{2(a-b)}{a+b} < 1$, $b^2 + 2ab - a^2 \geq 0$ et $x_{-1}, x_0 \in \left[\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right]$, alors le point d'équilibre $\bar{x}$ est globalement asymptotiquement stable.

■

Solution -

1. ***Vérifions que*** $x_n \in]0, +\infty[$ ***:***
   On a $a, b, x_{-1}, x_0 > 0$, et tous les trems de $\{x_n\}_{n \geq -1}$ s'écrits en fonction de a, b, x_{-1}, x_0, donc
   $$x_n \in]0, +\infty[, n = 1, 2, \ldots$$
2. ***Montrons que l'équation*** (3.27) ***admet un seul point d'équilibre :***
   Soit $\bar{x} \in]0, +\infty[$ un point d'équlibre de l'équation (3), donc
   $$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{a\bar{x} + b\bar{x}}{b\bar{x} + a\bar{x}} \\ (a+b)\bar{x}^2 - (a+b)\bar{x} &= 0 \end{aligned}$$
   cette équation admet dans $]0, +\infty[$ un seul solution $\bar{x} = 1$.
3. ***Montrer que*** $\bar{x}$ ***est localement asymptotiquement stable :***
   Soit la fonction
   $$\begin{aligned} f: \ ]0, +\infty[^2 &\longrightarrow]0, +\infty[\\ (x, y) &\longmapsto \frac{ax + by}{bx + ay}. \end{aligned}$$
   On a
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(a^2 - b^2)y}{(bx + ay)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(b^2 - a^2)x}{(bx + ay)^2}.$$
   D'où
   $$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{a - b}{a + b}, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{b - a}{a + b}.$$
   On a
   $$\begin{aligned} |p_0| + |p_1| &= \left|\frac{a - b}{a + b}\right| + \left|\frac{b - a}{a + b}\right| \\ &= \frac{2(a - b)}{a + b} < 1 \end{aligned}$$
   Alors, d'aprés le théorème de Clark $\bar{x} = 1$ est asymptotiquement stable.

4. ***Montrons que*** $x_n \in \left[\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right]$ ***:***
On a
$$x_{n+1} - \frac{b}{a} = \frac{ax_n + bx_{n-1}}{bx_n + ax_{n-1}} - \frac{b}{a} = \frac{(a-b)(a+b)x_n}{a(bx_n + ax_{n-1})} \geq 0.$$
donc
$$x_n \geq \frac{b}{a}.$$
$$x_{n+1} - \frac{a}{b} = \frac{ax_n + bx_{n-1}}{bx_n + ax_{n-1}} - \frac{a}{b} = \frac{(b-a)(a+b)x_n}{b(bx_n + ax_{n-1})} \leq 0.$$
donc
$$x_n \leq \frac{a}{b}.$$
Donc $x_n \in \left[\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right]$
5. ***Etudions la monotonie de la fonction*** f ***:***
On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(a-b)(a+b)y}{(bx+ay)^2} \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(b-a)(b+a)x}{(bx+ay)^2} \leq 0$$
donc f est croissante par rapport à x et décroissante par rapport à y.
6. ***Montrons que*** $\bar{x}$ ***est globalement asymptotiquement stable :***
On a $\frac{2(a-b)}{a+b} < 1$, alors $\bar{x} = 1$ est localement asymptotiquement stable. Il suffit de prouver que $\bar{x} = 1$ est globalement attractif, c'est à dir
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$
On a $x_{-1}, x_0 \in \left[\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right]$ et $x_n \in \left[\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right]$ donc $\left[\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right]$ est invariant. Soit la fonction
$$\begin{array}{rccc} f: & \left[\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right]^2 & \longrightarrow & \left[\dfrac{b}{a}, \dfrac{a}{b}\right] \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{ax+by}{bx+ay}. \end{array}$$
On a f est croissante par rapport à x et décroissante par rapport à y.
Soit $m, M \in \left[\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right]$ tels que
$$\begin{cases} m = f(m,M) \\ M = f(M,m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{am+bM}{bm+aM} \\ M = \dfrac{aM+bm}{bM+am} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Mm = \dfrac{M(am+bM)}{bm+aM} \\ Mm = \dfrac{m(aM+bm)}{bM+am} \end{cases}$$
Donc
$$\frac{M(am+bM)}{bm+aM} = \frac{m(aM+bm)}{bM+am}$$
$$\begin{aligned} b^2(M^3-m^3) + 2ab(M^2m - m^2M) - a^2(M^2m - m^2M) &= 0 \\ b^2(M-m)(M^2+mM+m^2) + 2abmM(M-m) - a^2mM(M-m) &= 0 \\ (M-m)\left[b^2(m^2+M^2) + mM(b^2+2ab-a^2)\right] &= 0 \end{aligned}$$
On a $b^2 + 2ab - a^2 \geq 0$ donc
$$\left[b^2(m^2+M^2) + mM(b^2+2ab-a^2)\right] > 0$$
alors $M - m = 0$, d'aprés le Théorème (3.2.1), l'équation (3.27) admet un seul ponit d'équlibre $\bar{x} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Exercice 3.13

Considérons l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \alpha x_{n-1}}{\beta + x_n} \tag{3.28}$$

avec $\alpha > 0, \beta > 0, x_{-1}, x_0 \geq 0$.

1. Soit $\beta < 1 + \alpha$, donner la formule du seul point d'équilibre strictement positive $\bar{x}$ de l'équation (3.30).
   Il est claire que $\bar{y} = 0$ est toujours point d'équilibre de l'équation (3.30).
2. Donner une condition (sur α et β) suffisante pour la stabilité locale assymptotique du point d'équilibre $\bar{x}$. Même question pour le point d'équilibre $\bar{y} = 0$.
3. Supposons que $\alpha < \beta < 1 + \alpha$. Montrer que si $x_{-1}, x_0 \leq \frac{\beta}{\alpha}$, alors $\left[0, \frac{\beta}{\alpha}\right]$ est un intervalle invariant pour (3.30).
4. Montrer que si $\beta - \alpha \neq -1$, alors l'équation (3.30) n'admet pas de solutions positives périodiques de période 2.

Solution -

1. ***Donnons la formule du seul point d'équilibre strictement positive $\bar{x}$:***
   Soit $\bar{x} \in]0, +\infty[$ un point d'équilibre de l'équation (3.30), donc
   $$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\bar{x} + \alpha \bar{x}}{\beta + \bar{x}} \\ \bar{x}(\bar{x} + \beta - \alpha - 1) &= 0 \end{aligned}$$
   cette équation admet dans $]0, +\infty[$ un seul solution $\bar{x} = \alpha + 1 - \beta$.
2. ***Donnons une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotique du $\bar{x}$:***
   Soit la fonction
   $$\begin{aligned} f: \quad [0, +\infty[^2 &\longrightarrow [0, +\infty[\\ (x, y) &\longmapsto \frac{x + \alpha y}{\beta + x}. \end{aligned}$$
   On a
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\beta - \alpha y}{(\beta + x)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\alpha}{\beta + x}.$$
   D'où
   $$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{x}) = \frac{\beta(1+\alpha) - \alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2} = \frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha}$$
   et
   $$p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{x}) = \frac{\alpha}{1 + \alpha}.$$
   D'après le théorème de Clark une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotique est $|p_0| + |p_1| < 1$. On a
   $$\begin{aligned} |p_0| + |p_1| &= \left|\frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha}\right| + \left|\frac{\alpha}{1 + \alpha}\right| < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{|\beta - \alpha| + \alpha}{1 + \alpha} < 1 \end{aligned}$$
   - Si $\beta > \alpha$: $\frac{\beta}{1+\alpha} < 1$ donc : $1 + \alpha < \beta$.
   - Si $\beta < \alpha$: $\frac{2\alpha - \beta}{1+\alpha-1} < 1$ donc : $\alpha - 1 < \beta$.

   b) Pour $\bar{y} = 0$:
   $$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{1}{\beta}, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

D'après le théorème de Clark une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotique de $\bar{y}=0$ est $|p_0|+|p_1|<1$. On a

$$\begin{aligned} |p_0|+|p_1| &= \left|\frac{1}{1+\beta}\right|+\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|<1 \\ &\Leftrightarrow \; 1+\alpha<\beta. \end{aligned}$$

3. ***Montrons que*** $\left[0,\frac{\beta}{\alpha}\right]$ ***est un intervalle invariant :***
   On a $\alpha>0,\beta>0,x_{-1},x_0\geq 0$, et tous les termes de $\{x_n\}_{n\geq -1}$ s'écrit en fonction de ses valeurs initiales, donc
   $$x_n\geq 0, n=0,1,\ldots$$
   D'autre part, on a
   $$x_{-1}\leq\frac{\beta}{\alpha}\Rightarrow x_0+\alpha x_{-1}\leq\beta+x_0$$
   donc
   $$x_1=\frac{x_0+\alpha x_{-1}}{\beta+x_0}\leq 1<\frac{\beta}{\alpha}$$
   De même
   $$x_2=\frac{x_1+\alpha x_0}{\beta+x_1}\leq 1<\frac{\beta}{\alpha}$$
   par indication on obtient
   $$x_n<\frac{\beta}{\alpha}.$$
   Donc $x_n\in\left[0,\frac{\beta}{\alpha}\right]\;\forall n\in\mathbb{N}$.
4. ***Montrons que l'équation*** (3.30) ***n'admet pas de solutions périodique de période 2 :***
   Supposons qu'il existe deux nombres réels distincts p et q, tel que
   $$\ldots,p,q,p,q,\ldots$$
   soit solution périodique de période deux de l'équation . Donc, on a
   $$q=f(p,q),p=f(q,p).$$
   Alors, on a
   $$q=\frac{p+\alpha q}{\beta+p},\quad p=\frac{q+\alpha p}{\beta+q}$$
   $$q\beta+qp=p+\alpha q,\quad p\beta+pq=q+\alpha p$$
   donc
   $$(q-p)(-1+\alpha-\beta)=0.$$
   On a $-1+\alpha-\beta\neq 0$, donc $p=q$. Qui est une contradiction.

Exercice 3.14

Considérons l'équation aux différences

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{\alpha x_n+x_{n-1}} \tag{3.29}$$

et $\alpha\geq 0$, $x_{-1},x_0>0$.

1. Montrer que (3.29) admet un seul point d'équilibre $\bar{x}$.
2. Déterminer l'équation aux différences linéaire associée de (3.29) atour de $\bar{x}$.
3. Donner une condition suffisante de la stabilité locale asymptotique du $\bar{x}$.
4. Montrer que $[0,1]$ est un intervalle invariant pour (3.29).

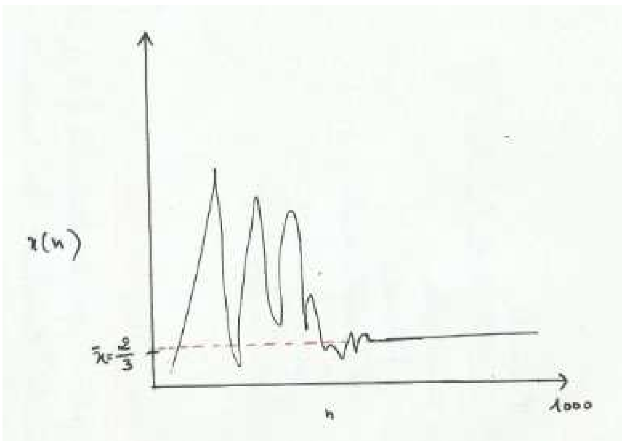
5. Supposons exist $[\varepsilon, 1]$ un intervalle invariant pour (3.29), $\varepsilon > 0$. Donner une condition pour $\bar{x}$ soit globalement attractif et déduire que si $\alpha < 1$ alors $\bar{x}$ est globalement stable.
6. Écrire le programme Matlab pour tracer la solution de (3.29) dans le cas $\alpha = 0.5, x_{-1} = 1, x_0 = 2$ et tracer une graph approximatif de la solution de (3.29).

Solution -

1. ***Déterminons les points d'équilibres de l'équation (3) :***
   Soit $\bar{x} \in]0, +\infty[$ un point d'équilibre de l'équation (3), donc
   $$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\bar{x}}{\alpha\bar{x} + \bar{x}} \\ \bar{x}((1+\alpha)\bar{x} - 1) &= 0 \end{aligned}$$
   $\bar{x} = 0$ (refuser car n'est pas un solution) ou $\bar{x} = \dfrac{1}{1+\alpha}$.
2. *Déterminer l'équation aux différences linéaire associée de (3) atour de $\bar{x}$.*
   L'équation linéaire associée est
   $$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1}$$
   Soit la fonction
   $$\begin{aligned} f: \quad]0, +\infty[^2 &\longrightarrow]0, +\infty[\\ (x, y) &\longmapsto \frac{y}{\alpha x + y}. \end{aligned}$$
   On a
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-\alpha y}{(\alpha x + y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\alpha x}{(\alpha x + y)^2}.$$
   D'où
   $$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{x}) = -\frac{\alpha}{1+\alpha}, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{x}) = \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$
   Donc
   $$y_{n+1} = -\frac{\alpha}{1+\alpha} y_n + \frac{\alpha}{1+\alpha} y_{n-1}$$
3. ***Donnons une condition suffisante de stabilité localement asymptotiquement de $\bar{x}$:***
   On a
   $$|p_0| + |p_1| = \left| -\frac{\alpha}{1+\alpha} \right| + \left| \frac{\alpha}{1+\alpha} \right| = \frac{2\alpha}{1+\alpha}.$$
   Alors, d'aprés le théorème de Clark $\bar{x}$ est asymptotiquement stable si $\dfrac{2\alpha}{1+\alpha} < 1$ qui donne $\alpha < 1$.
4. ***Montrons que $[0, 1]$ est un intervalle invariant pour (3)***
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
   $$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{\alpha x_n + x_{n-1}} \geq 0$$
   et
   $$x_{n+1} - 1 = \frac{-\alpha x_n}{\alpha x_n + x_{n-1}} \leq 0$$
   donc
   $$0 \leq x_n \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$
   On a f est croissante par rapport à x et décroissante par rapport à y.

5. ***Donnons une condition suffisante pour $\bar{x}$ soit globalement attractif :***
   Soit la fonction
   $$\begin{aligned} f: \quad [\varepsilon,1]^2 &\longrightarrow [\varepsilon,1] \\ (x,y) &\longmapsto \frac{y}{\alpha x+y}. \end{aligned}$$
   On a f est décroissante par rapport à x et croissante par rapport à y.
   Soit $m,M \in [0,1]$ tels que
   $$\begin{cases} m = f(M,m) \\ M = f(m,M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{m}{\alpha M+m} \\ M = \dfrac{M}{\alpha m+M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mM = \dfrac{mM}{\alpha M+m} \\ Mm = \dfrac{Mm}{\alpha m+M} \end{cases}$$
   Donc
   $$\frac{1}{\alpha M+m} = \frac{1}{\alpha m+M}$$
   $$(M-m)(1-\alpha) = 0.$$
   Si $\alpha \neq 1$ on obtient $M = m$, alors d'après le deuxième Théorème de convergence $\lim_{n\to+\infty} = \bar{x}$, par conséquent une condition suffisante de la tracttif global est $\alpha \neq 1$.
   Déduirons la stabilité globale :
   On a $\alpha < 1$, donc d'après la question (3) $\bar{x}$ est localement stable et d'après la question présidente globalement attractif, alors $\bar{x}$ est globalement stable.
6. ***Programme Matlab pour tracer la solution de (3) :***

```
M(1)=1/2
M(2)=8/9
for i=2:1000,
   M(i+1)=( (M(i-1))/(0.5*M(i)+M(i-1)));
 end
z=1:100;
plot(z,M(z));
grid on
xlabel('n');
ylabel('x(n)');
title('Le graph de');
```



Exercice 3.15

Soit l'équation aux différences
$$x_{n+1} = \frac{1-x_{n-1}}{A+x_n}. \tag{3.30}$$
avec $x_{-1},x_0 \in]-\infty,0]$ et $A \in]-\infty,0]$.

I) 1. Montrer que si $A < -1$, alors $-1 < \bar{x} < 0$.
   2. Montrer que si $A < -1$, alors $\bar{x}$ est asymptotiquement stable.

II) Supposons que $A \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $[A,0]$ est un intervalle invariant, et soit $x_{n+1} = f(x_n,x_{n-1})$.

1. Monter que f est décroissant par rapport à x et croissant par rapport à y.
2. Montrer que $\bar{x}$ est globalement asymptotiquement stable.

Solution -

1. • ***Déterminons les points d'équilibres*** **:**
   Soit $\bar{x} \in]-\infty, 0]$ un point d'équilibre de l'équation, donc
   $$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1-\bar{x}}{A+\bar{x}} \\ \bar{x}^2 + (A+1)\bar{x} - 1 &= 0 \end{aligned}$$
   Donc
   $$\bar{x} = \frac{-(A+1)+\sqrt{(A+1)^2+4}}{2}, \quad \bar{x} = \frac{-(A+1)-\sqrt{(A+1)^2+4}}{2}.$$
   Dans $]-\infty, 0]$ on a un seul point d'équilibre
   $$\bar{x} = \frac{-(A+1)-\sqrt{(A+1)^2+4}}{2}.$$
   • ***Montrons que*** $-1 < \bar{x} < 0$ **:**
   Supposons que $\bar{x} \geq 0$, donc
   $$\begin{aligned} -(A+1)-\sqrt{(A+1)^2+4} &\geq 0 \\ -(A+1) &\geq \sqrt{(A+1)^2+4} \\ (A+1)^2 &\geq (A+1)^2+4 \\ 4 &\leq 0 \quad (contradiction). \end{aligned}$$
   Donc $0 < \bar{x}$.
   Supposons que $\bar{x} \leq -1$, donc
   $$\begin{aligned} -(A+1)-\sqrt{(A+1)^2+4} &\leq -2 \\ -A+1 &\leq \sqrt{(A+1)^2+4} \\ (-A+1)^2 &\leq (A+1)^2+4 \\ A &\geq -1 \quad (contradiction). \end{aligned}$$
   Donc $\bar{x} \geq -1$, alors $-1 < \bar{x} < 0$.
2. ***Montrons que*** $\bar{x}$ ***est asymptotiquement stable :***
   Soit la fonction
   $$\begin{aligned} f: \quad]-\infty, 0]^2 &\longrightarrow]-\infty, 0] \\ (x, y) &\longmapsto \frac{1-y}{A+x}. \end{aligned}$$
   On a
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y-1}{(A+x)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{(A+x)}.$$
   D'où
   $$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{x}) = \frac{\bar{x}-1}{(A+\bar{x})^2}, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{x}) = \frac{-1}{(A+\bar{x})}.$$
   On a
   $$p_0 = \frac{\bar{x}-1}{(A+\bar{x})^2} = \frac{-1}{(A+\bar{x})}\frac{-\bar{x}+1}{(A+\bar{x})} = \frac{-\bar{x}}{(A+\bar{x})}$$

$$\begin{aligned} |p_0|+|p_1| &= \left|\frac{-\bar{x}}{(A+\bar{x})}\right| + \left|\frac{-1}{(A+\bar{x})}\right| \\ &= \frac{-\bar{x}+1}{(A+\bar{x})} \\ &= -\bar{x} < 1. \end{aligned}$$

d'aprés le Théorème de Clark $\bar{x}$ est localement asymptotiquement stable.

3. ***Montrons que $\bar{x}$ est globalement asymptotiquement stable :*** Soit la fonction

$$\begin{aligned} f: \quad [A,0]^2 &\longrightarrow [A,0] \\ (x,y) &\longmapsto \frac{1-y}{A+x}. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y-1}{(A+x)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{(A+x)}.$$

Alors, f est décroissant paraport à x et croissant paraport à y

Soient $(m,M) \in [A,0]^2$ tel que

$$\begin{cases} m = f(M,m) \\ M = f(m,M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1-m}{A+M} \\ M = \dfrac{1-M}{A+m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Am+mM = 1-m \\ Mm+AM = 1-M \end{cases}$$

Donc $(m-M)(A+1) = 0 \Rightarrow M = m$ (car $A \neq -1$), donc d'aprés théoème de convergence,

$$\lim_{n\to+\infty} = \bar{x}$$

Alors $\bar{x}$ est globalement attractif, donc elle est globalement asymptotiquement stable.

Exercice 3.16

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{-\beta x_n}{\gamma - x_{n-1}}. \tag{3.31}$$

avec $\beta, \gamma > 0$.

1. En posant $x_n = \beta y_n$ et $A = \gamma/\beta$, vérifier que l'équation (2.1) équivalent l'équation

$$y_{n+1} = \frac{-y_n}{A - y_{n-1}}. \tag{3.32}$$

2. Montrer que l'équation (3.32) admet deux points d'équilibres $\bar{y}_1$ et $\bar{y}_2$ avec $\bar{y}_2 > 0$.
3. Montrer que si $A+1 > 1$, alors le point d'équilibre $\bar{y}_2$ est instable.
4. Montrer que si $\gamma > \beta$, alors le point d'équilibre $\bar{y}_1$ est asymptotiquement stable.
5. Supposons que $A > 2$, $y_{-1} \in [-1,1]$ et $y_0 \in [-1,0]$.
   Montrer que $\{y_{2n+1}\}_n$ est positive et décroissante et $\{y_{2n}\}_n$ est négative et croissante.
6. Déduire que $\bar{y}_1$ est attractif.

■

Solution -

1. ***Vérifions que l'équation*** (3.31) ***équivalent l'équation*** (3.32) ***:***

   En posant $x_n = \beta/y_n$:

$$\beta y_{n+1} = \frac{-\beta\beta y_n}{\gamma - \beta y_{n-1}}$$

Donc
$$y_{n+1} = \frac{-y_n}{\frac{\gamma}{\beta} - y_{n-1}} = \frac{-y_n}{A - y_{n-1}}.$$

2. ***Les points d'équilibres de l'équation*** (3.32) **:**
Soit $\overline{y} \in \mathbb{R}$ un point d'équilibre de l'équation (3.32) , donc
$$\overline{y} = \frac{-\overline{y}}{A - \overline{y}}$$
$$\overline{y}^2 - (1+A)\overline{y} \;\;=\;\; 0$$
Donc l'équation (3.32) admet deux points d'équilibres $\overline{y}_1 = 0$ et $\overline{y}_2 = A+1$.

3. ***Montrer que point d'équilibre $\overline{y}_2$ est instable :***
Soit la fonction
$$\begin{aligned} f:\;\; [-\infty,+\infty[^2 &\longrightarrow [-\infty,+\infty[\\ (x,y) &\longmapsto \frac{-x}{A-y}. \end{aligned}$$
On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{A-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{(A-y)^2}.$$
D'où
$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{y}_2,\overline{y}_2) = 1, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{y}_2,\overline{y}_2) = A+1.$$
L'équation linéaire associé à (3.32) atour de $\overline{y}_2$ est
$$z_{n+1} + z_n + (A+1)z_{n-1} = 0$$
l'équation caractéristique est
$$\lambda^2 + \lambda + (A+1) = 0$$
Les valeurs propres sont

4. ***Montrons que $\overline{y}_1$ est asymptotiquement stable :***
$$q_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{y}_1,\overline{y}_1) = -\frac{1}{A}, \quad q_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{y}_1,\overline{y}_1) = 0.$$
On a
$$|q_0| + |q_1| = \frac{1}{A} = \frac{\beta}{\gamma} < 1(car\; \gamma > \beta).$$
D'aprés le Théorème de Clark $\overline{y}_1$ est asymptotiquement stable.

5. On a $A > 2$, $y_{-1} \in [-1,1]$ et $y_0 \in [-1,0]$, donc
$$\begin{array}{cc} 0 \le y_1 = \dfrac{-y_0}{A - y_{-1}} \le 1, & -1 \le y_2 = \dfrac{-y_1}{A-y_0} \le 0 \\ 0 \le y_3 = \dfrac{-y_2}{A - y_1} \le 1, & -1 \le y_4 = \dfrac{-y_3}{A-y_2} \le 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \le y_{2n-1} \le 1, & -1 \le y_{2n} \le 0 \end{array}$$
Par inducation $\{y_{2n+1}\}_n$ est positive et $\{y_{2n}\}_n$ est négative. D'autre part, on a
$$\frac{y_{2n-1}}{y_{2n+1}} = \frac{y_{2n-1}}{\frac{-y_{2n}}{A-y_{2n-1}}} = -(A-y_{2n})\frac{y_{2n}}{y_{2n+1}} = (A-y_{2n-1})(A-y_{2n-2}) > 1$$

car $A > 2$, donc

$$y_{2n-1} > y_{2n+1}, \quad \forall n \in N,$$

par coséquent $\{y_{2n+1}\}_n$ est décroissante.
De même, o n a

$$\frac{y_{2n}}{y_{2n+2}} = \frac{y_{2n}}{\frac{-y_{2n+1}}{A-y_{2n}}} = -(A-y_{2n})\frac{y_{2n}}{y_{2n+1}} = (A-y_{2n})(A-y_{2n-1}) > 1$$

car $A > 2$, donc

$$y_{2n} < y_{2n+2}, \quad \forall n \in N,$$

par coséquent $\{y_{2n+1}\}_n$ est croissante.

6. ***Déduirons que $\overline{y}_1$ est attractif :***
On a $\{y_{2n+1}\}_n$ est positive et décroissante, donc

$$\lim_{n\to+\infty} y_{2n+1} = 0 \tag{3.33}$$

On a $\{y_{2n}\}_n$ est négative et croissante, donc

$$\lim_{n\to+\infty} y_{2n} = 0 \tag{3.34}$$

De (3.33) et (3.34)

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0 = \overline{y}_1.$$

Donc $\overline{y}_1$ est attractif.

Exercice 3.17 Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha+\beta x_{n-1}}{1+x_n}. \tag{3.35}$$

avec $x_{-1}, x_0 \geq 0$ et $\alpha, \beta > 0$.

1. Montrer que si $\alpha < 1$, alors le seul point d'équilibre $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable.
Supposons existe $A > 0$ tel que $x_n \leq A, \forall n \geq 0$ et $\alpha < 1$.
2. Montrer que $\overline{x}$ est globalement asymptotiquement stable.

Solution -

- ***Déterminons les points d'équilibres*** **:**
Soit $\overline{x} \in [0,+\infty[$ un point d'équilibre de l'équation, donc

$$\overline{x} = \frac{\alpha+\beta\overline{x}}{1+\overline{x}}$$
$$\overline{x}^2 + (1-\alpha)\overline{x} - \beta = 0$$

Donc

$$\overline{x} = \frac{-(1-\beta)+\sqrt{(1-\beta)^2+4\alpha}}{2}, \quad \overline{x} = \frac{-(1-\beta)+\sqrt{(1-\beta)^2+4\alpha}}{2}.$$

Dans $[0,+\infty[$ on a un seul point d'équilibre

$$\overline{x} = \frac{-(1-\beta)+\sqrt{(1-\beta)^2+4\alpha}}{2}.$$

1. ***Montrons que $\bar{x}$ est asymptotiquement stable :***
   Soit la fonction
$$\begin{aligned} f: \quad [0,+\infty[^2 &\longrightarrow [0,+\infty[\\ (x,y) &\longmapsto \frac{\alpha+\beta y}{1+x}. \end{aligned}$$
   On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\alpha+\beta y}{(1+x)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\beta}{(1+x)}.$$
   D'où
$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{x}) = -\frac{\alpha+\beta\bar{x}}{(1+\bar{x})^2}, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{x}) = \frac{\beta}{(1+\bar{x})}.$$
   On a
$$p_0 = -\frac{\alpha+\beta\bar{x}}{(1+\bar{x})^2} = \frac{-1}{(1+\bar{x})}\frac{\alpha+\beta\bar{x}}{(1+\bar{x})} = \frac{-\bar{x}}{(1+\bar{x})}$$
$$\begin{aligned} |p_0|+|p_1| &= \left|\frac{-\bar{x}}{(1+\bar{x})}\right| + \left|\frac{\beta}{(1+\bar{x})}\right| \\ &= \frac{\bar{x}+\beta}{(1+\bar{x})} < 1, (car \beta+\bar{x} < 1+\bar{x}). \end{aligned}$$
   d'aprés le Théorème de Clark $\bar{x}$ est localement asymptotiquement stable.
2. ***Montrons que $\bar{x}$ est globalement asymptotiquement stable :***
   On a $x_n \leq A, \forall n \geq 0$, d'autre part $x_n \geq 0, \forall n \geq 0$ car $x_{-1}, x_0 \leq$ et $\alpha,\beta > 0$. donc $[0,A]$ est un interval invariant. Soit la fonction
$$\begin{aligned} f: \quad [0,A]^2 &\longrightarrow [0,A] \\ (x,y) &\longmapsto \frac{\alpha+\beta y}{1+x}. \end{aligned}$$
   On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\alpha+\beta y}{(1+x)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\beta}{(1+x)}.$$
   Alors, f est décroissant paraport à x et croissant paraport à y
   Soient $(m,M) \in [A,0]^2$ tel que
$$\begin{cases} m = f(M,m) \\ M = f(m,M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{\alpha+\beta m}{1+M} \\ M = \dfrac{\alpha+\beta M}{1+m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(1+M) = \alpha+\beta m \\ M(1+m) = \alpha+\beta M \end{cases}$$
   Donc $(m-M)(\beta+1) = 0 \Rightarrow M = m$ (car $\beta \neq -1$), donc d'aprés théoème de convergence,
$$\lim_{n\to+\infty} = \bar{x}$$
   Alors $\bar{x}$ est globalement attractif, donc elle est globalement asymptotiquement stable.

Exercice 3.18 **I)** Soit $\{H_n\}_{n\geq 0}$ la suite d'Horadam définie par $H_{n+2} = pH_{n+1} + qH_n, \quad H_0 = 0, H_1 = 1$.
1. Montrer que
$$H_{n+k}H_{n+1} - H_{n+k+1}H_n = (-q)^n H_k, \quad \forall n,k \geq 0.$$

II Soit l'équation aux différences
$$x_{n+1} = \frac{q}{p+x_n}, \quad \forall n \geq 0, \quad x_0 \geq 0, p,q > 0. \tag{3.36}$$

1. Trouver le point d'équilibre positive de l'équation (3.36).
2. Déterminer l'équation linéaire associée au équation (3.36).
3. Montrer que l'équation (2.4) est localement asymptotiquement stable.
4. Montrer que la forme de la solution de l'équation (3.36) est donnée par

$$x_n = q\frac{H_{n+1}+H_n x_0}{H_{n+2}+H_{n+1}x_0}, \quad n \geq 0.$$

5. Montrer que le point d'équilbre de (3.36) est globalement stable

Solution -

Soit $k \in N$, par reccurence sur n :

- Pour $n = 0$ on a

$$H_k H_1 - H_{k+1}H_0 = H_k = (-q)^0 H_k$$

donc la propsition est vrais pour $n = 0$.

- Supposons que la proposition est vrais pour n, c'es-à-dir

$$H_{n+k}H_{n+1} - H_{n+k+1}H_n = (-q)^n H_k$$

et montrons la proposition pour $n+1$. On a

$$\begin{aligned} H_{n+k+1}H_{n+2} - H_{n+k+2}H_{n+1} &= H_{n+k+1}(pH_{n+1}+qH_n) - (pH_{n+k+1}+qH_{n+k})H_{n+1} \\ &= qH_{n+k+1}H_n - qH_{n+k}H_{n+1} \\ &= -q(-q)^n H_k = (-q)^{n+1}H_k. \end{aligned}$$

- Donc

$$H_{n+k}H_{n+1} - H_{n+k+1}H_n = (-q)^n H_k, \quad \forall n,k \geq 0.$$

1. ***Déterminons les points d'équilibres*** **:**
   Soit $\bar{x} \in [0,+\infty[$ un point d'équilibre de l'équation, donc
   $$\bar{x} = \frac{q}{p+\bar{x}}$$
   $$\bar{x}^2 + p\bar{x} - q = 0$$
   Donc
   $$\bar{x} = \frac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2}, \quad \bar{x} = \frac{-p-\sqrt{p^2+4q}}{2}.$$
   Dans $[0,+\infty[$ on a un seul point d'équilibre
   $$\bar{x} = \frac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2}.$$
2. ***Déterminer l'équation linéaire associée***
   On definie la fonction
   $$\begin{aligned} f: \ [0,+\infty[&\longrightarrow [0,+\infty[\\ x &\longmapsto f(x) = \frac{q}{p+x} \end{aligned}$$
   L'équation aux différences linéaire associée a l'équation (3.3) autor du point d'équilibre $\bar{x}$ est
   $$y_{n+1} = p_0 y_n$$
   avec
   $$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) = -\frac{q}{(p+\bar{x})^2} = -\frac{2q}{2q+p^2+p\sqrt{p^2+4q}}$$

donc l'équation aux différences linéaire associée a l'équation (3.3) autor du point d'équilibre $\overline{x} = -1$ est

$$y_{n+1} = -\frac{2q}{2q + p^2 + p\sqrt{p^2 + 4q}} y_n.$$

3. ***Montrons que l'équation est localement asymptotiquement stable***
On a

$$|p_0| = \left| -\frac{2q}{2q + p^2 + p\sqrt{p^2 + 4q}} \right| = \frac{2q}{2q + p^2 + p\sqrt{p^2 + 4q}} < 1$$

car

$$2q < 2q + p^2 + p\sqrt{p^2 + 4q}$$

Donc, d'aprés le Théorème de Clark $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable.

4. ***Montrons la forme de la solution de l'équation***
Par récurrence : On a

$$x_1 = \frac{q}{p + x_0} = q\frac{H_1 + H_0 x_0}{H_2 + H_1 x_0}$$

Donc la proposition est vrais pour $n = 0$. Supposons que vrais pour $n - 1$. c'est-à-dire,

$$x_{n-1} = q\frac{H_n + H_{n-1}x_0}{H_{n+1} + H_n x_0}$$

D'après l'équation (3.35)

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{q}{p + x_{n-1}} \\ &= \frac{q}{p + q\frac{H_n + H_{n-1}x_0}{H_{n+1} + H_n x_0}} \\ &= \frac{q}{\frac{p(H_{n+1} + H_n x_0) + q(H_n + H_{n-1}x_0)}{H_{n+1} + H_n x_0}} \\ &= q\frac{H_{n+1} + H_n x_0}{pH_{n+1} + qH_n + (pH_n + qH_{n-1})x_0}. \end{aligned}$$

Donc, on a

$$x_n = q\frac{H_{n+1} + H_n x_0}{H_{n+2} + H_{n+1}x_0}.$$

5. ***Montrons que $\overline{x}$ est globalement asymptotiquement stable :***
On a $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable. Il suffit de prouver que $\overline{x}$ est globalement attractif, c'est à dir

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

On sait que $\lim_{n\to\infty} \frac{H_{n+1}}{H_n} = \Phi^+$ avec $\Phi^+ = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$. Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} q\frac{H_{n+1} + H_n x_0}{H_{n+2} + H_{n+1}x_0} \\ &= q\frac{H_{n+1}\left(1 + \frac{H_n}{H_{n+1}}x_0\right)}{H_{n+1}\left(\frac{H_{n+2}}{H_{n+1}} + x_0\right)} \\ &= q\frac{\left(1 + \frac{1}{\Phi^+}x_0\right)}{(\Phi^+ + x_0)} \\ &= \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 3.19 Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.37}$$

avec $\alpha > 0, \alpha \neq 1, x_0, x_{-1}, x \in [0, +\infty[$
Etudier l'existence et la stabilité locale et globale des points d'équilibres de l'équation (3.37).

Solution -

1. ***Détrminons les points d'équilibres de*** (3.37) ***:***
Soit $\overline{x}$ un point d'équibitre de l'équation, donc
$$\begin{aligned} x = \frac{\alpha \overline{x}}{1+\overline{x}^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{x}(\overline{x}^2 + (1-\alpha)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{x} = 0 \vee \overline{x}^2 = \alpha - 1 \end{aligned}$$
   - Si $\alpha > 1$: les ponts d'équilibres sont : $\overline{x} = 0, \overline{x} = \sqrt{\alpha - 1}$.
   - Si $\alpha < 1$:le seul point d'équilibres est $\overline{x} = 0$.
2. ***Stabilité locale des points d'équilibres :***
$$\begin{aligned} f: \quad [0,+\infty[^2 &\longrightarrow [0,+\infty[\\ (x,y) &\longmapsto \frac{\alpha y}{1+xy}. \end{aligned}$$
On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-\alpha y^2}{(1+xy)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\alpha}{(1+xy)^2}.$$
   - Si $\alpha > 1$: les points d'équilibres sont : $\overline{x} = 0, \overline{x} = \sqrt{\alpha - 1}$.
     - $\overline{x} = 0$
$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \alpha.$$
L'équation linéaire associé est
$$y_{n+1} = \alpha y_{n-1}$$
Le polynôme caractéstique est $P(\lambda) = \lambda^2 - \alpha$, donc les valeurs proprs sont
$$\lambda = \pm\sqrt{\alpha} > 1$$
Donc $\overline{x} = 0$ est instable.
     - $\overline{x} = \sqrt{\alpha - 1}$:
$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{\alpha-1}, \sqrt{\alpha-1}) = \frac{1-\alpha}{\alpha}, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{\alpha-1}, \sqrt{\alpha-1}) = \frac{1}{\alpha}.$$
L'équation linéaire associé est
$$y_{n+1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} y_n + \frac{1}{\alpha} y_{n-1}$$
Le polynôme caractéstique est $P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda - \frac{1}{\alpha}$, donc les valeurs proprs sont
$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\alpha}$$
On a $|\lambda_1| = 1$, donc en peut rien dire.

- Si $\alpha < 1$ le seul points d'équilibre est : $\bar{x} = 0$.

$$|p_0| + |p_1| = \alpha < 1$$

d'aprés le Théorème de Clark $\bar{x} = 0$ est localement assymptotiquement stable.

3. ***Stabilité globale des points d'équilibres :***
Si $\alpha < 1$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}} \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \alpha x_{n-1} \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \alpha^2 x_{n-2} \\ &\vdots \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \alpha^n x_{-1} \to 0 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, alors $\bar{x} = 0$ est globalement attractif, par conséquent $\bar{x} = 0$ est globalement assymptotiquement stable.

Exercice 3.20 **I)** Soit $\{S_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci généralisé définie par

$$S_{n+2} = aS_{n+1} + bS_n, \quad S_0 = 0, S_1 = 1.$$

1. Donner la forme des solutions (Formule de Benet) de la suite de Fibonacci généralisé. (on note les racines par α et β, avec $\alpha > \beta$).
2. Montrer que

$$S_{n-1}S_{n+1} - S_n^2 = -(-b)^{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

II Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{b}{a + x_{n-1}}, \quad \forall n \geq 0, \quad x_0, x_{-1} \geq 0, a, b > 0. \tag{3.38}$$

1. Montrer que le seul point d'équilibre de l'équation (3.38) est localement asymptotiquement stable.
2. Montrer que la forme de la solution de l'équation (3.38) est donnée par

$$x_{2n+1} = b\frac{S_{n+1} + S_n x_{-1}}{S_{n+2} + S_{n+1} x_{-1}}, \quad x_{2n} = b\frac{S_n + S_{n-1} x_0}{S_{n+1} + S_n x_0}, \quad n \geq 1.$$

3. Montrer que le point d'équilibre de (3.38) est globalement stable.

■

Solution -

1. ***Donnons la forme des solutions (Formule de Benet) de la suite de Fibonacci généralisé :***
L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0.$$

Ainsi, les racines caractéristiques sont

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

La solution générale de l'équation s'écrit

$$S_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n,$$

utilisons les conditions initiales, on obtient

$$c_1 = \frac{1}{\alpha-\beta}, c_2 = -\frac{1}{\alpha-\beta}$$

d'ou

$$S_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta} \tag{3.39}$$

2. Soit $k \in N$, par reccurence sur n :
   - Pour $n = 1$ on a
   $$S_0S_2 - S_1^2 = (-1)^n$$
   donc la propsition est vrais pour $n = 0$.
   - Supposons que la proposition est vrais pour n, c'es-à-dir
   $$S_{n-1}S_{n+1} - S_n^2 = -1 = -(-b)^0$$
   et montrons la proposition pour $n+1$. On a
   $$\begin{aligned} S_nS_{n+2} - S_{n+1}^2 &= S_n(aS_{n+1} + bS_n) - S_{n+1}(aS_n + bS_{n-1}) \\ &= -b(S_{n-1}S_{n+1} - S_n^2) \\ &= -(-b)^n. \end{aligned}$$
   - Donc
   $$S_{n-1}S_{n+1} - S_n^2 = -(-b)^{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

1. ***Déterminons les points d'équilibres*** **:**
   Soit $\bar{x} \in [0, +\infty[$ un point d'équilibre de l'équation, donc
   $$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{b}{a+\bar{x}} \\ \bar{x}^2 + a\bar{x} - b &= 0 \end{aligned}$$
   Donc
   $$\bar{x} = \frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2}, \quad \bar{x} = \frac{-a-\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$
   Dans $[0, +\infty[$ on a un seul point d'équilibre
   $$\bar{x} = \frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$
2. ***Déterminer l'équation linéaire associée***
   On definie la fonction
   $$\begin{aligned} f: \quad [0, +\infty[&\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto f(x,y) = \frac{b}{a+y} \end{aligned}$$
   L'équation aux différences linéaire associée a l'équation (3.3) autor du point d'équilibre $\bar{x}$ est
   $$y_{n+1} = p_0y_n + p_1y_{n-1}$$
   avec
   $$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) = 0, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) = -\frac{b}{(a+\bar{x})^2} = -\frac{2b}{2q+p^2+a\sqrt{a^2+4b}}$$
   donc l'équation aux différences linéaire associée a l'équation (3.3) autor du point d'équilibre $\bar{x} = -1$ est
   $$y_{n+1} = -\frac{2b}{2b+a^2+a\sqrt{a^2+4b}}y_{n-1}.$$

3. ***Montrons que l'équation est localement asymptotiquement stable***
   On a
   $$|p_0|+|p_0| = \left|-\frac{2b}{2b+a^2+a\sqrt{a^2+4b}}\right| = \frac{2b}{2b+a^2+a\sqrt{a^2+4b}} < 1$$
   car
   $$2b < 2b+a^2+a\sqrt{a^2+4b}$$
   Donc, d'aprés le Théorème de Clark $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable.
4. ***Montrons la forme de la solution de l'équation***
   Par récurrence : On a
   $$x_1 = \frac{b}{a+x_{-1}} = b\frac{S_1+S_0x_{-1}}{S_2+S_1x_{-1}}$$
   Donc la proposition est vrais pour $n=1$. Supposons que vrais pour $n-1$. c'est-à-dire,
   $$x_{2n-1} = b\frac{S_n+S_{n-1}x_{-1}}{S_{n+1}+S_nx_{-1}}, \quad x_{2n-2} = b\frac{S_{n-1}+S_{n-2}x_0}{S_n+S_{n-1}x_0}.$$
   D'après l'équation (3.35)
   $$\begin{aligned} x_{2n} &= \frac{b}{a+x_{2n-2}} \\ &= \frac{b}{a+b\frac{S_{n-1}+S_{n-2}x_0}{S_n+S_{n-1}x_0}} \\ &= \frac{b}{\frac{a(S_n+S_{n-1}x_0)+b(S_{n-1}+S_{n-2}x_0)}{S_n+S_{n-1}x_0}} \end{aligned}$$
   Donc, on a
   $$x_{2n} = b\frac{S_n+S_{n-1}x_0}{S_{n+1}+S_nx_0}.$$
   de même on obtien
   $$x_{2n+1} = b\frac{S_{n+1}+S_nx_{-1}}{S_{n+2}+S_{n+1}x_{-1}}$$
5. ***Montrons que $\overline{x}$ est globalement asymptotiquement stable :***
   On a $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable. Il suffit de prouver que $\overline{x}$ est globalement attractif, c'est à dir
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$
   On sait que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n} = \alpha$ avec $\alpha = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$. Donc
   $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_{2n} &= \lim_{n\to\infty} b\frac{S_n+S_{n-1}x_0}{S_{n+1}+S_nx_0} \\ &= \lim_{n\to\infty} b\frac{S_n\left(1+\frac{S_{n-1}}{S_n}x_0\right)}{S_n(\frac{S_{n+1}}{S_n}+x_0)} \\ &= \frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2} = \overline{x}. \end{aligned}$$
   De même
   $$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2} = \overline{x}$$
   Alors
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2} = \overline{x}$$

Exercice 3.21 Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{1+x_nx_{n-1}},\quad n\geq 0. \tag{3.40}$$

avec $x_{-1},x_0\in]0,+\infty[$.

1. Résoudre l'équation aux différences suivante (discuter les cas $p=1$, $p\neq 1$)

$$w_{n+1}=pw_n+q,\quad n\geq 0. \tag{3.41}$$

avec $p,q,w_0\in]0,+\infty[$.

2. Montrer que le changement de variable $y_n=\dfrac{1}{x_nx_{n-1}}$ ramène l'équation (3.40) à l'équation

$$y_{n+1}=ay_n+b,\quad n\geq 0.\quad (\textit{Donner la valeur de } a \textit{ et de } b) \tag{3.42}$$

3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $x_{n+1}=\dfrac{y_n}{y_{n+1}}x_{n-1}$.
4. Donner la forme explicite de x_n en fonction des valeurs initiales x_{-1} et x_0.

Solution -

1. ***Résoudrons l'équation*** (3.41) **:**
   L'équation (3.41) est une éqution aux différences linéare acoefficients constants d'ordre 1. De (2.24)
   - Si $p=1$

$$\begin{aligned} w_n &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1}a(i)\right]w_0+\sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1}a(i)\right]g(r)\\ &= \left[\prod_{i=0}^{n-1}1\right]y_0+\sum_{r=0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1}1\right]q\\ &= y_0+qn. \end{aligned}$$

   - Si $p\neq 1$

$$\begin{aligned} w_n &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1}a(i)\right]w_0+\sum_{r=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1}a(i)\right]g(r)\\ &= \left[\prod_{i=0}^{n-1}p\right]w_0+\sum_{r=0}^{n-1}\left[\prod_{i=r+1}^{n-1}p\right]q\\ &= p^ny_0+\sum_{r=0}^{n-1}\left[(p)^{n-r-1}\right]q\\ &= p^nw_0+\left(\frac{p^n-1}{p-1}\right)q. \end{aligned}$$

2. ***Vérifions que l'équation*** (3.40) ***équivalent l'équation*** (3.42) ***:***
   En posant $y_n=\dfrac{1}{x_nx_{n-1}}$:

$$\frac{1}{y_{n+1}x_n}=\frac{x_{n-1}}{1+\frac{1}{y_n}}$$

   Donc

$$\frac{1}{y_{n+1}}=\frac{1}{y_n+1}$$

D'où

$$y_{n+1} = ay_n + b, \quad n \geq 0. \quad (a = b = 1)$$

3. ***Montrons que pour tout*** $n \in \mathbb{N}$***, on a*** $x_{n+1} = \frac{y_n}{y_{n+1}} x_{n-1}$.

Du chengement de variable on a

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{y_{n+1} x_n} \\ &= \frac{1}{y_{n+1} \frac{1}{y_n x_{n-1}}} \\ &= \frac{y_n}{y_{n+1}} x_{n-1}. \end{aligned}$$

4. ***Donnons la forme explicite de*** x_n On a

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{y_{n-1}}{y_n} x_{n-2} \\ &= \frac{y_{n-1}}{y_n} \frac{y_{n-3}}{y_{n-2}} x_{n-4} \\ &= \frac{y_{n-1}}{y_n} \frac{y_{n-3}}{y_{n-2}} \frac{y_{n-5}}{y_{n-4}} x_{n-6} \end{aligned}$$

Donc

$$x_n = \begin{cases} \frac{y_{n-1}}{y_n} \frac{y_{n-3}}{y_{n-2}} \cdots \frac{y_2}{y_3} \frac{y_0}{y_1} x_{-1} & n \text{ impair} \\ \frac{y_{n-1}}{y_n} \frac{y_{n-3}}{y_{n-2}} \cdots \frac{y_2}{y_3} \frac{y_1}{y_2} x_0 & n \text{ pair} \end{cases}$$

De question 2, on a $y_n = y_0 + n$, d'où

$$x_n = \begin{cases} \frac{(y_0+n-1)(y_0+n-3)\cdots(y_0+2)y_0}{(y_0+n)(y_0+n-3)\cdots(y_0+3)(y_0+1)} x_{-1} & n \text{ impair} \\ \frac{(y_0+n-1)(y_0+n-3)\cdots(y_0+1)}{(y_0+n)(y_0+n-2)\cdots(y_0+3)(y_0+2)} x_0 & n \text{ pair} \end{cases}$$

et comme $y_0 = \frac{1}{x_0 x_{-1}}$, la solution de (3.40) est

$$x_n = \begin{cases} \frac{\prod_{i=0}^{(n-1)/2} (1+2ix_0x_{-1})}{\prod_{i=0}^{(n-1)/2} (1+(2i+1)x_0x_{-1})} x_{-1} & n \text{ impair} \\ \frac{\prod_{i=0}^{(n-2)/2} (1+(2i+1)x_0x_{-1})}{\prod_{i=0}^{n/2} (1+2ix_0x_{-1})} x_0 & n \text{ pair} \end{cases}$$

4. Systèmes d’équations aux différences linéaires

4.1 Trigonalisation

Définition 4.1.1 On dit que f est trigonalisable si et seulement si il existe une base B de E telle que la matrice de f dans la base B soit triangulaire.

Définition 4.1.2 $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice triangulaire, c’est-à-dire il existe une matrice $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire.

R

1. Soient $f \in L(E)$, B une base de E, $A = Mat_B(f)$. Alors f est trigonalisable si et seulement si A est trigonalisable.
2. Toute matrice triangulaire est trigonalisable.
3. Si $f \in L(E)$ est trigonalisable, alors les éléments diagonaux d’une matrice triangulaire représentant f sont les valeurs propres de f, écrites sur cette diagonale autant de fois que l’indiquent leurs ordres de multiplicité.

4.1.1 Une condition nécessaire et suffisante de trigonalisation

Théorème 4.1.1 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
i) A est trigonalisable.
ii) $P_A(\lambda)$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

R Nous avons le même théorème pour un endomorphisme en dimension finie.

Démonstration.

1. $i) \Rightarrow ii)$ Supposons que A soit trigonalisable, alors A est semblable à une matrice T triangulaire
$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}.$$
Donc $P_T(\lambda) = (\lambda - t_{11})(\lambda - t_{22}) \cdots (\lambda - t_{nn})$, alors $P_A(\lambda)$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
2. $ii) \Rightarrow i)$ On fait une preuve par récurrence sur n.
   - Soit $P(n)$ la propriété : *Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $P_A(\lambda)$ soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors A est trigonalisable.*
   - On a $P(1)$ est vraie.
   - Supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

   Soit $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que $P_A(\lambda)$ soit scindé sur $\mathbb{K}$. $P_A(\lambda)$ donc admet ou moins un racine dans $\mathbb{K}$, que l'on notera λ. Soit v_1 un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Donc A semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ avec
   - $B \in M_{1,n}(\mathbb{K})$
   - $A_1 \in M_{n,n}(\mathbb{K})$
   - $0 \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ matrice nulle.

   On a
   $$P_f(X) = (\lambda - X)P_{A_1}(X).$$
   Donc $P_{A_1}(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$. D'après $P(n)$, il existe P_2 inversible et T_2 une matrice triangulaire telles que $A_2 = P_2 T_2 P_2^{-1}$.
   Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K})$.
   P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix}$.
   Montrons qu'il existe $X \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ telle qu'en notant $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & X \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$, on ait
   $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = PTP^{-1}.$$
   On a : $PTP^{-1} = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & X \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & XP_2^{-1} \\ 0 & A_1 \end{matrix}$ Il suffit donc de choisir $X = BP_2$ pour obtenir $\begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = PTP^{-1}$.
   Ceci montre que A est trigonalisable.

■

Corollaire 4.1.2 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.
1. Tout endomorphisme de E est trigonalisable.
2. De même, toute matrice carrée de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Démonstration.
1. Soit f un endomorphisme de E. Tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}$, donc P_f est scindé par conséquent f est trigonalisable.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}$, donc P_A est scindé par conséquent A est trigonalisable.

■

4.2 Réduction de Jordan

4.2.1 Formes de Jordan

Définition 4.2.1 On appelle ***bloc de Jordan*** d'ordre l, une matrice $J(\lambda) \in M_l(\mathbb{K})$ de la forme

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

■ **Example 4.1**

- La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une bloc de Jordan d'ordre 2.
- La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une bloc de Jordan d'ordre 3.
- La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une bloc de Jordan d'ordre 4.

■

Définition 4.2.2 On dit qu'une matrice M est ***sous la forme de Jordan*** si elle est diagonale par blocs et que les blocs diagonaux sont des blocs de Jordan.

■ **Example 4.2** La matrice $A \in M_6(\mathbb{R})$, telle que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est sous la forme de Jordan, il y a 3 blocs de Jordan.

■

R Une matrice sous la forme de Jordan est une matrice triangulaire supérieur.

4.2.2 Réduction de Jordan d'une matrice

La réduction de Jordan d'un endomorphisme f sur$E$ consiste à trouver une base de E dans laquelle la matrice de f par rapport a B est sous forme de Jordan. De même la réduction de Jordan d'une matrice A consiste à trouver une matrice sous forme de Jordan étre semblable a A.

Théorème 4.2.1 (de Jordan)

1. Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique, $P_f(X)$ est scinde sur $\mathbb{K}$, alors il existe une base de E ou la matrice de f est sous forme de Jordan.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ a son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, alors, A est semblable (sur $\mathbb{K}$) à une matrice sous forme de Jordan.

4.2.3 Technique pratique de trigonalisation

La technique pour calcule de la réduction de Jordan d'une matrice A sur $\mathbb{K}$ est de la façon suivante :

1. Factoriser le polynôme caractéristique $p(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$. On continue uniquement si le polynôme caractéristique est scindé.
2. Trouver une base de chaque sous espace propre.
3. Compléter cette base s'il ya lieu. Si la multiplicité de la valeur propre λ est m, alors qu'il y'a que $l < m$ vecteurs propres libres, il faut trouver encore $m - l$ vecteurs. Pour chaque vecteurs propres v déjà trouvé, vous allez résoudre le système
$$(A - \lambda I)w = v.$$
Vous devez vérifier que la solution w est libre de vecteurs déja écrit.
4. On fabrique la matrice de passage P en mattanten colonnes les vecteurs propres trouvés.
5. On calcule P^{-1}, et fabriquer la matrice sous la forme de Jordan J par la relation
$$J = P^{-1}AP.$$

4.2.4 Exemples de trigonalisation

■ Example 4.3

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. *Déterminons le polynôme caractéristique de A.*
$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2.$$
Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$, ce sont donc -1 (double).
2. *Montrons que A n'est pas diagonalisable.*
On a
$$E_{-1} = \left\{ (x,y);\ A\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \right\} =< (1,-1) > .$$
Donc $dimE_{-1} = 1 \neq dg(-1) = 2$ par conséquent A n'est pas diagonalisable.
3. *Montrons que A est trigonalisable.*
Le polynôme caractéristique de A est scindé, donc A est trigonalisable.
4. *Complétons une base de E_{-1} et déterminons P la matrice de passage.*
le sous espace E_{-1} est engendré par le vecteur $v_1 = (1,-1)$. Pour compléter une base de $\mathbb{R}^2$, cherchons un vecteur $v_2 = (x,y)$ vérifiant le système
$$(A + I_2)v_2 = v_1.$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$
On obtient donc le système
$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ -2x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - y$$
Si en pose $x = 0$ on obtient $y = \frac{1}{2}$. Donc $v_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$
La matrice de passage P est égale à
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5. *Calculons P^{-1} et Déterminons la matrice sous la forme de Jordan J*

$$P^{-1} = \frac{1}{detP}{}^t(Co(P)) = 2^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

■

■ Example 4.4

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. *Déterminons le polynôme caractéristique de B.*

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^2.$$

Les valeurs propres de B sont les racines de $P_{AB}(\lambda)$, ce sont donc 0 (simple) et 1 (double).

2. *Montrons que B n'est pas diagonalisable.*

$$E_0 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \right\}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -x-z=0 \Leftrightarrow x=-z=-y \\ -y+z=0 \end{cases}$$

Donc

$$E_0 = \{(x,-x,-x); \quad x \in \mathbb{R}\} =< (1,-1,-1) > .$$

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \right\}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} x+y=x \\ -x-z=y \Leftrightarrow x=-z, y=0 \\ -y+z=z \end{cases}$$

Donc

$$E_1 = \{(-z,0,z); \quad x \in \mathbb{R}\} =< (-1,0,1) > .$$

et $(-1,0,1)$ est libre donc forme une base de E_1, alors $dimE_1 = 1 \neq dg(1) = 2$ par conséquent B n'est pas diagonalisable.

3. *Montrons que B est trigonalisable.*
   Le polynôme caractéristique de B est scindé, donc B est trigonalisable.
4. *Complétons une base de E_1 et déterminons P la matrice de passage.*
   le' sous espace E_1 est engendré par le vecteur $v_1 = (-1,0,1)$. Pour compléter une base de $\mathbb{R}^3$, cherchons un vecteur $v_2 = (x,y,z)$ vérifiant le système

$$(B - I_3)v_2 = v_1.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   On obtient le système

$$\begin{cases} y = -1 \\ -x - y - z = 0 \\ -y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1, x = 1 - z$$

   On pose z=0, on obtient $x = 1$, donc $v_2 = (1,-1,0)$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(-1,0,1) + \beta(1,-1,0) = (0,0,0)$, donc $\alpha = \beta = 0$, d'où v_1 et v_2 forment une base de E_1.
   La matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. *Calculons P^{-1} et Déterminons la matrice sous la forme de Jordan J*

   On a

$$detP = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{L_1 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

   Donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{detP}{}^t(Co(P)) = \frac{1}{1}{}^t \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   D'où

$$J = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

4.3 Résoudre les systèmes d'équations aux différences linéaires d'ordre un

Soient $(U_{1_n}), (U_{2_n}), \ldots, (U_{k_n})$ k suites, et soit le système des suites récurrentes

$$\begin{cases} U_{1_{n+1}} = a_{11}U_{1_n} + a_{12}U_{2_n} + \cdots + a_{1k}U_{k_n} \\ U_{2_{n+1}} = a_{21}U_{1_n} + a_{22}U_{2_n} + \cdots + a_{2k}U_{k_n} \\ \quad \vdots \\ U_{k_{n+1}} = a_{k1}U_{1_n} + a_{k2}U_{2_n} + \cdots + a_{kk}U_{k_n} \end{cases} \tag{4.1}$$

d'écrire le système sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} U_{1_{n+1}} \\ U_{2_{n+1}} \\ \vdots \\ U_{k_{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{12} \\ a_{12} & a_{12} & \dots & a_{12} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1_n} \\ U_{2_n} \\ \vdots \\ U_{k_n} \end{pmatrix}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} U_{1_n} \\ U_{2_n} \\ \vdots \\ U_{k_n} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{12} \\ a_{12} & a_{12} & \dots & a_{12} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{12} \end{pmatrix}$. Donc le système (4.1) s'écrire

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Qui nous donne :

$$X_n = A^n X_0.$$

- Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix},$$

  et une matrice inversible P tels que

$$A = PDP^{-1}.$$

$$X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0,$$

  c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} U_{1_n} \\ U_{2_n} \\ \vdots \\ U_{k_n} \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{k-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k^n \end{pmatrix} P^{-1} \times \begin{pmatrix} U_{1_0} \\ U_{2_0} \\ \vdots \\ U_{k_0} \end{pmatrix}.$$

- Si A est trigonalisable, alors il existe une matrice sous la forme de Jordan J et une matrice inversible P tels que

$$A = PJP^{-1}.$$

  Donc

$$X_n = A^n X_0 = PJ^n P^{-1} X_0,$$

  La matrice J est sous la forme de Jordan, donc il s'écrit

$$J = D + N$$

  avec D est une matrice diagonale et N est une matrice nilpotente. Donc

$$J^n = (D+N)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i N^i D^{n-i}.$$

D'où

$$X_n = P\sum_{i=0}^{n} C_n^i N^i D^{n-i} P^{-1} X_0.$$

■ **Example 4.5** Soit le système des suites récurrentes suivant :

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 4V_n \\ V_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n \end{cases} \tag{4.2}$$

avec $U_0 = 1$ et $V_0 = 2$.

Le système (4.2) s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Diagonaliser A

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

la matrice A d'ordre 2 et admet deux valeurs propre distinctes qui sont -1 et 2, donc A est diagonalisable.

$$E_{-1} = \left\{(x,y) : \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} = <(2,-1)> .$$

$$E_2 = \left\{(x,y) : \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} = <(4,1)> .$$

Alors,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \; et \; P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

et

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Posant $Y_n = P^{-1}X_n$, donc

$$X_{n+1} = AX_n \Leftrightarrow Y_{n+1} = DY_n.$$

D'où $Y_n = D^n Y_0 = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(-1)^n \\ 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Finalement

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(-1)^n \\ 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3}(-1)^n + 2^{n+1} \\ \frac{1}{3}(-1)^n + 2^{n-1} \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne l'expression du terme général de chacune des deux suites :

$$U_n = \frac{-2}{3}(-1)^n + 2^{n+1}, \quad V_n = \frac{1}{3}(-1)^n + 2^{n-1}.$$

■

■ **Example 4.6** Soit le système des suites récurrentes suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases} \tag{4.3}$$

avec $u_0 = 0, v_0 = 22$ et $w_0 = 22$.

Le système (4.3) s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Donc on aura

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Diagonaliser A

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 - L_1}{\overset{L_2 - L_1}{=}} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12} - \lambda & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} - \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\frac{1}{12} - \lambda\right)\left(\frac{1}{4} - \lambda\right).$$

la matrice A d'ordre 3 et admet trois valeurs propre distictes qui sont $1, \frac{1}{12}$ et $\frac{1}{4}$, donc A est diagonalisable.

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \right\} =< (1,1,1) > .$$

$$E_{\frac{1}{4}} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \right\} =< (1,0,-1) > .$$

$$E_{\frac{1}{12}} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \right\} =< (3,-8,3) > .$$

La matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

D'autre part on a

$$P^{-1} = \frac{1}{detP}{}^{t}(Co(P)) = \frac{1}{22}{}^{t}\begin{pmatrix} 8 & 11 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ 8 & -11 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N} : X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0$

$$= \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix}$$

et donc : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_n = 14 - \dfrac{11}{4^n} - \dfrac{3}{12^n} \\ v_n = 14 + \dfrac{8}{12^n} \\ w_n = 14 + \dfrac{11}{4^n} - \dfrac{3}{12^n} \end{cases}$ ■

■ **Example 4.7**

Soit le système des suites récurrentes suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 2w_n \end{cases} \tag{4.4}$$

avec $u_0 = 1, v_0 = 0$ et $w_0 = -1$.

Le système (4.4) s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donc on aura

$$X_{n+1} = AX_n.$$

1. *Déterminons le polynôme caractéristique de A.*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -3 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)^2.$$

Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(\lambda)$, ce sont donc 2 (simple) et 3 (double). On a $P_A(\lambda)$ est scindé donc A est trigonalisable.

2. *Déterminons les sous espaces propres*

$$E_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}. \right\}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \Leftrightarrow x = z = y \\ \qquad 2z = 2z \end{cases}$$

Donc

$$E_2 = \{(x,x,x); \quad x \in \mathbb{R}\} =< (1,1,1) > .$$

$$E_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}. \right\}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 3x \\ -x + 2y + z = 3y \Leftrightarrow y = -x, z = 0 \\ \qquad 2z = 3z \end{cases}$$

Donc

$$E_3 = \{(x,-x,0); \quad x \in \mathbb{R}\} =< (1,-1,0) > .$$

et $(1,-1,0)$ est libre donc forme une base de E_3, alors $dimE_3 = 1 \neq dg(1) = 2$ par conséquent A n'est pas diagonalisable.

3. *Complétons une base de E_3 et déterminons P la matrice de passage.*
le' sous espace E_3 est engendré par le vecteur $v_1 = (1,-1,0)$. Pour compléter une base de $\mathbb{R}^3$, cherchons un vecteur $v_2 = (x,y,z)$ vérifiant le système

$$(B - 3I_3)v_2 = v_1.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -1 \Leftrightarrow z = 0, x = 1 - y \\ \qquad -z = 0 \end{cases}$$

On pose y=0, on obtient $x = 1$, donc $v_2 = (1,0,0)$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(1,0,0) + \beta(1,-1,0) = (0,0,0)$, donc $\alpha = \beta = 0$, d'où v_1 et v_2 forment une base de E_3.
La matrice de passage P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. *Calculons P^{-1} et Déterminons la matrice sous la forme de Jordan J*

On a $detP = -1$, donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{detP}\,{}^{t}(Co(P)) = \frac{1}{1}{}^{t}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a $J = D + N$, avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} J^n &= (D+N)^n \\ &= \sum_{i=0}^{1} C_k^i N^i D^{k-i} = D^n + nND^{n-1}, \quad (car\ N^k = 0, \forall k \geq 2) \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} A^n &= PJ^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n3^{n-1}+3^n & n3^{n-1} & 2^n - 2n3^{n-1} - 3^n \\ -n3^{n-1} & 3^n - n3^{n-1} & 2^n - 3^n + 2\times 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement la solution de (4.4) est

$$\begin{aligned} X_n &= A^nX_0 \\ &= \begin{pmatrix} n3^{n-1}+3^n & n3^{n-1} & 2^n - 2n3^{n-1} - 3^n \\ -n3^{n-1} & 3^n - n3^{n-1} & 2^n - 3^n + 2\times 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+n)3^n - 2^n \\ 3n - (n+2)3^{n-1} - 2^n \\ -2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

5. Systèmes d'équations aux différences non linéa

5.1 Définitions de Stabilité

Soient f et g deux fonctions continûment différentiables

$$f:\ I^{k+1}\times J^{k+1}\longrightarrow I,\ g:\ I^{k+1}\times J^{k+1}\longrightarrow J$$

où I, J sont des intervalles réels. Considérons le système d'équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1}= & f\left(x_n,x_{n-1},\ldots,x_{n-k},y_n,y_{n-1},\ldots,y_{n-k}\right)\\ y_{n+1}= & g\left(x_n,x_{n-1},\ldots,x_{n-k},y_n,y_{n-1},\ldots,y_{n-k}\right)\end{cases}\tag{5.1}$$

où $n,k\in\mathbb{N}_0$, $(x_{-k},x_{-k+1},\ldots,x_0)\in I^{k+1}$ et $(y_{-k},y_{-k+1},\ldots,y_0)\in J^{k+1}$.

Définissons la fonction

$$H:\ I^{k+1}\times J^{k+1}\longrightarrow I^{k+1}\times J^{k+1}$$

par

$$H(W)=(f_0(W),f_1(W),\ldots,f_k(W),g_0(W),g_1(W),\ldots,g_k(W))$$

avec

$$W=(u_0,u_1,\ldots,u_k,v_0,v_1,\ldots,v_k)^T,$$

$$f_0(W)=f(W),f_1(W)=u_0,\ldots,f_k(W)=u_{k-1},$$

$$g_0(W)=g(W),g_1(W)=v_0,\ldots,g_k(W)=v_{k-1}.$$

Posons,

$$W_n=\left[x_n,x_{n-1},\ldots,x_{n-k},y_n,y_{n-1},\ldots,y_{n-k}\right]^T.$$

Ainsi, le système (5.1) est équivalent au système

$$W_{n+1}=H(W_n),\quad n=0,1,\ldots,\tag{5.2}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} x_{n+1} = & f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}) \\ x_n = & x_n \\ \vdots & \\ x_{n-k+1} = & x_{n-k+1} \\ y_{n+1} = & g(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1} \ldots, y_{n-k}) \\ y_n = & y_n \\ \vdots & \\ y_{n-k+1} = & y_{n-k+1} \end{cases}.$$

■ **Example 5.1**

Soit le système d'équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1+y_n}{1+x_{n-2}} \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_{n-2}} \end{cases} \tag{5.3}$$

le système (5.3) est équivalent au système

$$\begin{cases} x_{n+1} = & \dfrac{1+y_n}{1+x_{n-2}} \\ x_n = & x_n \\ x_{n-1} = & x_{n-1} \\ y_{n+1} = & \dfrac{1}{1+x_{n-2}} \\ y_n = & y_n \\ y_{n-1} = & y_{n-k+1} \end{cases}.$$

■

Définition 5.1.1

1. Un point $(\bar{x};\bar{y})$ est dit point d'équilibre pour le système (5.1) si

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}, \ldots, \bar{y}),$$
$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}, \ldots, \bar{y}).$$

2. Un point $\overline{W} = (\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}, \ldots, \bar{y}) \in I^{k+1} \times J^{k+1}$ est point d'équilibre du système (5.2) si

$$\overline{W} = H(\overline{W}).$$

■ **Example 5.2**

Soit le système d'équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{1+y_{n-1}} \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_{n-1}} \end{cases} \tag{5.4}$$

Trouver les ponits d'équilibres positives du système (5.4).
Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ un point d'équilibre du systèmes (5.4), donc

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{1+\bar{y}} \\ \bar{y} = \dfrac{1}{1+\bar{x}} \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \bar{y} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Le seul points d'équilibre positive du système (5.4) est $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$. ■

Définition 5.1.2 Une solution $\{(x_n, y_n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ du système (5.1) est dite ***éventuelleement périodique*** de période $p \in \mathbb{N}_0$ si

$$\exists N \geq -k; \quad x_{n+p} = x_n, \quad y_{n+p} = y_n.$$

Si $N = -k$, on dit que la solution est ***périodique*** de période p .

■ **Example 5.3**

■

5.1.1 Stabilité des systèmes d'équations aux différences non linéaires

Définition 5.1.3 Soient $\overline{W}$ un point d'équilibre du système (5.2) et $\|\ .\ \|$ une norme, par exemple la norme euclidienne.

1. Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit stable (ou localement stable) si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\| W_0 - \overline{W} \| < \delta$ implique $\| W_n - \overline{W} \| < \varepsilon$ pour $n \geq 0$.
2. Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit asymptotiquement stable (ou localement asymptotiquement stable) s'il est stable et s'il existe $\gamma > 0$ tel que $\| W_0 - \overline{W} \| < \gamma$ implique
$$\| W_n - \overline{W} \| \to 0, n \to +\infty.$$
3. Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit globalement attractif (respectivement globalement attractif de bassin d'attraction l'ensemble $G \subseteq I^{k+1} \times J^{k+1}$), si pour chaque W_0 (respectivement pour chaque $W_0 \in G$)
$$\| W_n - \overline{W} \| \to 0, n \to +\infty.$$
4. Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit globalement asymptotiquement stable (respectivement globalement asymptotiquement stable par rapport à G) si est localement stable, et si pour chaque W_0 (respectivement pour chaque $W_0 \in G$),
$$\| W_n - \overline{W} \| \to 0, n \to +\infty.$$
5. Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit instable s'il n'est pas localement stable.

R Il est claire que $(\overline{x}, \overline{y}) \in I \times J$ est un point d'équilibre du système (5.1) si et seulement si $\overline{W} = (\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \ldots, \overline{y}) \in I^{k+1} \times J^{k+1}$ est un point d'équilibre du système (5.2).

Définition 5.1.4 On appelle ***système linéaire associée*** au système (5.2) autour du point d'équilibre

$$\overline{W} = (\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \cdots, \overline{y})$$

le syttème

$$W_{n+1} = AW_n, n = 0, 1, \ldots$$

où A est la matrice Jacobienne de la fonction H au point d'équilibre $\overline{W}$, donnée par

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_0}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial f_0}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_0}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial v_k}(\overline{W}) \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial f_1}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_1}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial v_k}(\overline{W}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_k}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial f_k}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_k}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial v_k}(\overline{W}) \\ \frac{\partial g_0}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_0}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_0}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial g_0}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_0}{\partial v_k}(\overline{W}) \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial g_1}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_1}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial v_k}(\overline{W}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_k}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial g_k}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_k}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial v_k}(\overline{W}) \end{bmatrix}$$

■ **Example 5.4** Trouvez le système linéaire associé au système (5.4), autour du paint d'équilibre potitive $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

le système (5.4) est équivalent au système

$$\begin{cases} x_{n+1} = & \dfrac{1}{1+y_{n-1}} \\ x_n = & x_n \\ y_{n+1} = & \dfrac{1}{1+x_{n-1}} \\ y_n = & y_n \end{cases}$$

le système linéaire associé au système (5.4), autour du point d'équilibre potitive $\overline{W}$ est donnée par

$$W_{n+1} = AW_n$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_0}{\partial x} & \dfrac{\partial f_0}{\partial y} & \dfrac{\partial f_0}{\partial z} & \dfrac{\partial f_0}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} & \dfrac{\partial f_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial g_0}{\partial x} & \dfrac{\partial g_0}{\partial y} & \dfrac{\partial g_0}{\partial z} & \dfrac{\partial g_0}{\partial t} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} & \dfrac{\partial g_1}{\partial t} \end{pmatrix},$$

$$W_n = (u_n, v_n, w_n, z_n)$$

et

$$f_0 : \begin{array}{ll} (0,+\infty)^4 & \longrightarrow (0,+\infty) \\ (x,y,z,t) & \longmapsto \dfrac{1}{1+t} \end{array}$$

$$f_1 : \begin{array}{ll} (0,+\infty)^4 & \longrightarrow (0,+\infty) \\ (x,y,z,t) & \longmapsto x \end{array}$$

$$g_0 : \begin{array}{ll} (0,+\infty)^4 & \longrightarrow (0,+\infty) \\ (x,y,z,t) & \longmapsto \dfrac{1}{1+y} \end{array}$$

$$\begin{aligned} g_1: \quad & (0,+\infty)^4 && \longrightarrow (0,+\infty) \\ & (x,y,z,t) && \longmapsto z \end{aligned}$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

5.1.2 Stabilité par linéarisation

Théorème 5.1.1

1. Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne A sont dans le disque unité ouvert $|\lambda| < 1$, alors le point d'équilibre $\overline{W}$ du système (5.2) est localement asymptotiquement stable.
2. Si au moins une valeur propre de la matrice Jacobienne A a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre $\overline{W}$ du système (5.2) est instable.

■ **Example 5.5** Monter que point d'équilibre potitive du systèmes (5.4) est localemnet asymptotiquement stable.

D'aprés l'exemple (5.4), le système linéaire associé au système (5.4), autour du point d'équilibre potitive $\overline{W}$ est donnée par

$$W_{n+1} = AW_n$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$det(A-\lambda I_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Les valeurs propres de la matrice de Jacobie A sont

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \quad \lambda_3 = i\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \quad \lambda_4 = -i\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.$$

On a $|\lambda_i| < 1, \quad i = 1,\ldots,4.$, donc d'aprés le Théorème (5.1.1), le point d'équilibre positive du système (5.4) est localemnet asymptotiquement stable. ■

5.2 Exercices

Exercice 5.1 Soit le système d'équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{1+y_n} \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_n} \end{cases} \tag{5.5}$$

avec $x_0, y_0 \geq 0$.

1. Trouver le point d'équilbre positive du système (5.5).
2. Déterminer le système linéaire associé au système (5.5).
3. Monter que le système (5.5) est asymptotiquement stable.

Solution -

Exercice 5.2

Soit le système d'équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{\alpha y_n}{\beta + \gamma y_n} \\ y_{n+1} = \dfrac{\alpha y_n}{\beta + \gamma y_n} \end{cases} \tag{5.6}$$

avec $x_0, y_0 \in [0, +\infty[$ et $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

1. Trouver les points d'équilibres positives du système (5.6).
2. Supposon que $\alpha < \beta$. Montrer que le système (5.6) est globalement stable.

Solution -

Exercice 5.3

Soit le système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{1-y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{1-x_n}, \quad n \geq 0. \tag{5.7}$$

avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R} - \{1\}$.

1. Montrer que la solution $\{x_n, y_n\}_{n \geq -1}$ du système (5.7) est périodique de période 3.
2. Déduire la forme explisite de la solution du système (5.7).

Solution -

1. ***Montrons que la solution $\{x_n, y_n\}_{n \geq -1}$ est périodique de période 6 :***

De (5.7) on a

$$\begin{cases} x_{n+2} = \dfrac{1}{1-y_{n+1}} = \dfrac{x_n-1}{x_n} \\ x_{n+3} = \dfrac{1}{1-y_{n+2}} = y_n \\ x_{n+4} = \dfrac{1}{1-y_{n+3}} = \dfrac{1}{1-x_n} \\ x_{n+5} = \dfrac{1}{1-y_{n+4}} = \dfrac{y_n-1}{y_n} \\ x_{n+6} = \dfrac{1}{1-y_{n+5}} = x_n \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{n+2} = \dfrac{1}{1-x_{n+1}} = \dfrac{y_n-1}{y_n} \\ y_{n+3} = \frac{1}{1-x_{n+2}} = x_n \\ y_{n+4} = \dfrac{1}{1-x_{n+3}} = \dfrac{1}{1-y_n} \\ y_{n+5} = \dfrac{1}{1-x_{n+4}} = \dfrac{x_n-1}{x_n} \\ y_{n+6} = \dfrac{1}{1-x_{n+5}} = y_n \end{cases}$$

Donc $\{x_n, y_n\}_{n\geq 0}$ est périodique de période 6.

2. ***Déduirons la forme de la solution :*** La forme de la solution de (5.7) est

$$\begin{cases} x_{6n} = x_0 \\ x_{6n+1} = \dfrac{1}{1-y_0} \\ x_{6n+2} = \dfrac{x_0-1}{x_0} \\ x_{6n+3} = y_0 \\ x_{6n+4} = \dfrac{1}{1-x_0} \\ x_{6n+5} = \dfrac{y_0-1}{y_0} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{6n} = y_0 \\ y_{6n+1} = \dfrac{1}{1-x_0} \\ y_{6n+2} = \dfrac{y_0-1}{y_0} \\ y_{6n+3} = x_0 \\ y_{6n+4} = \dfrac{1}{1-y_0} \\ y_{6n+5} = \dfrac{x_0-1}{y_0} \end{cases} \qquad n \geq 0$$

Exercice 5.4

Soit le système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{b^2}{x_n y_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{b y_n}{x_n + y_{n-1}}, \quad n \geq 0. \tag{5.8}$$

avec $x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1} > 0, b > 0$.

1. Montrer que la solution $\{x_n, y_n\}_{n\geq -1}$ du système (5.8) est périodique de période 3.
2. Déduire la forme explisite de la solution du système (5.8).

Solution -

1. ***Montrons que la solution $\{x_n, y_n\}_{n\geq -1}$ est périodique de période 3 :***
2. ***Déduirons la forme explisite de la solution :***

Exercice 5.5

Soit le système d'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{a}{x_n y_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{b y_n}{x_{n-1} y_{n-1}}, \quad n \geq 0 \tag{5.9}$$

avec $x_{-1}, y_{-1}, x_0, y_0 > 0$, $b > 0$ et $a = b^2$.

1. Montrer que la solution du système (5.9) est éventulement périodique de période p (déterminé la valeur de p).

2. Déduire la forme de solution du système (5.9).

Solution -

1. ***Montrons que la solution*** $\{x_n, y_n\}_{n\geq -1}$ ***est éventulement périodique :***
   De (5.9) on a

$$\begin{cases} x_{n+2} = \dfrac{a}{x_{n+1}y_{n+1}^2} = \dfrac{x_n y_n x_{n-1} y_{n-1}}{b} \\ x_{n+3} = \dfrac{a}{x_{n+2}y_{n+2}^2} = x_n \end{cases} \quad \begin{cases} y_{n+2} = \dfrac{by_{n+1}}{x_n y_n} = \dfrac{a}{x_n x_{n-1} y_{n-1}} \\ y_{n+3} = \dfrac{by_{n+2}}{x_{n+1}y_{n+1}} = x_n \end{cases}$$

   Donc $\{x_n, y_n\}_{n\geq 0}$ est éventulement périodique de période 3.
2. ***Déduirons la forme de la solution :***
   La forme de la solution de (5.9) est

$$\begin{cases} x_{3n} = x_0 \\ x_{3n+1} = \dfrac{a}{x_0 y_0^2} \\ x_{3n+2} = \dfrac{x_0 y_0 x_{-1} y_{-1}}{b} \end{cases} \quad \begin{cases} y_{3n} = y_0 \\ y_{3n+1} = \dfrac{by_0}{x_{-1}y_{-1}} \\ y_{3n+2} = \dfrac{a}{x_0 x_{-1} y_{-1}} \end{cases} \qquad n \geq 0$$

Exercice 5.6

Soit le système d'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n-1}y_{n-1}}, \quad n \geq 0 \tag{5.10}$$

avec les valeurs initiales x_{-1}, y_{-1}, x_0 et y_0 sont des nombres réels non nulles.

1. Montrer que la solution du système (5.10) est éventulement périodique de période p (déterminé la valeur de p).
2. Déduire la forme de solution du système (5.10).
3. Écrire le programme Matlab pour tracer la solution de (5.10) dans le cas $x_{-1} = \frac{1}{3}, x_0 = 2, y_0 = 1, y_{-1} = 6$ et tracer un graph approximatif de la solution de (5.10).

Solution -

1. ***Montrons que la solution du système*** (5.10) ***est périodique de période p***
   On a

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{x_{n-1}y_{n-1}}{y_n}, & y_{n+2} &= \frac{1}{x_n x_{n-1} y_{n-1}} \\ x_{n+3} &= x_n x_{n-1} y_{n-1}, & y_{n+3} &= \frac{1}{x_n} \\ x_{n+4} &= x_n, & y_{n+4} &= y_n \end{aligned}$$

   Donc $\{(x_n, y_n)\}_{n=-1}^{\infty}$ est éventuellemnet périodique de période $p = 4$.
2. ***Déduirons la forme de solution du système*** (5.10) ***:***

$$\begin{aligned} (x_{4n}, y_{4n}) &= (x_0, y_0) \\ (x_{4n+1}, y_{4n+1}) &= \left(\frac{1}{y_0}, \frac{y_0}{x_{-1}y_{-1}}\right) \\ (x_{4n+2}, y_{4n+2}) &= \left(\frac{x_{-1}y_{-1}}{y_0}, \frac{1}{x_0 x_{-1} y_{-1}}\right) \\ (x_{4n+3}, y_{4n+3}) &= \left(x_0 x_{-1} y_{-1}, \frac{1}{x_0}\right) \end{aligned}$$

pour tous $n \geq 0$.

3. ***Programme Matlab pour tracer la solution de*** (5.10) ***:***

Exercice 5.7

Soit le système d'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}}, \quad n \geq 0 \tag{5.11}$$

avec $x_{-1}, y_{-1}, x_0, y_0 > 0$.

1. Montrer que la solution du système (5.11) est périodique de période p (déterminé la valeur de p).
2. Déduire la forme de solution du système (5.11).
3. Tracez un graphe approximatif du systéme (5.11) avec les valeues initiales $x_{-1} = 2, y_{-1} = 1, x_0 = 3, y_0 = 1.5$.

Solution -

1. ***Montrons que la solution*** $\{x_n, y_n\}_{n \geq -1}$ ***est périodique de période p :***
   De (5.7) on a

$$\begin{cases} x_{n+2} = \dfrac{1}{y_n} \\ x_{n+3} = \dfrac{1}{y_{n+1}} = x_{n-1} \\ x_{n+4} = \dfrac{1}{y_{n+2}} = x_n \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{n+2} = \dfrac{1}{x_n} \\ y_{n+3} = \dfrac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}} = y_{n-1} \\ y_{n+4} = \dfrac{1}{x_{n+2}} = y_n \end{cases}$$

   Donc $\{x_n, y_n\}_{n \geq 0}$ est périodique de période p=4.
2. ***Déduirons la forme de la solution :*** La forme de la solution de (5.11) est

$$\begin{cases} x_{4n} = x_0 \\ x_{4n+1} = \dfrac{1}{y_{-1}} \\ x_{4n+2} = \dfrac{1}{y_0} \\ x_{4n+3} = x_{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} y_{4n} = y_0 \\ y_{4n+1} = \dfrac{1}{x_{-1}} \\ y_{4n+2} = \dfrac{1}{x_0} \\ y_{4n+3} = y_{-1}. \end{cases} \qquad n \geq 0$$

3. ***Tracons un graphe approximatif du systéme*** (5.11)

Exercice 5.8

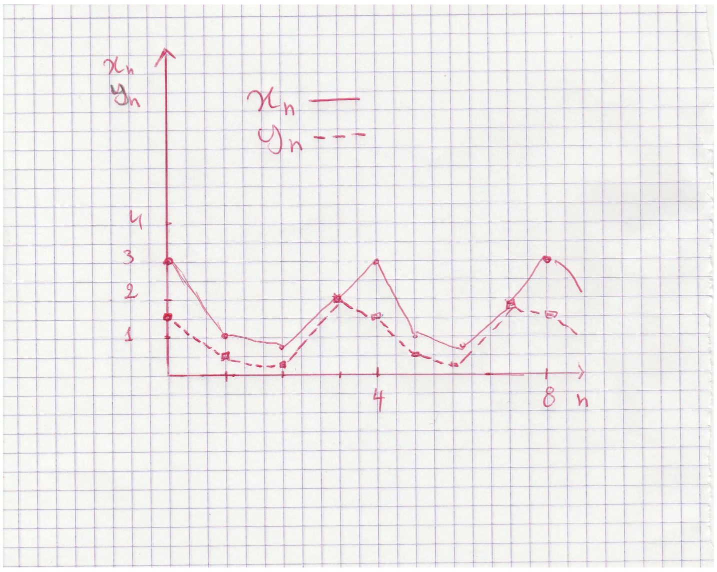
Soit le système d'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{x_n y_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{\beta y_n}{x_{n-1} y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.12}$$

où $x_{-1}, y_{-1}, x_0, y_0, \alpha$ et β sont des nombres réels strictement positifs.

1. Montrer que la solution du système (5.12) est unique.
2. Le système (5.1) admet-il-des points d'équilibres ?
3. Montrer que pour toute solution $(x_n, y_n)_{n \geq -1}$ du (5.12), alors

$$x_{n+3} = \frac{\alpha}{\beta^2} x_n, \quad y_{n+3} = \frac{\beta^2}{\alpha} y_n, \quad n \geq 1.$$



4. **a)** Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que la solution du système (5.12) est périodique de période 3.
   b) Donner la forme explicite de la solution danss ce cas.
5. Donner la forme explicite de la solution du (5.12) lorsque la solution n'est pas éventuellement périodique.

Solution -

1. ***Montrons que la solution du système* (5.12) *est unique :***
   Soit $(x_n, y_n)_{n\geq n_0}$ une solution du système (5.12) avec les conditions initilaes, alors

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{x_n y_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{\beta y_n}{x_{n-1} y_{n-1}}$$

Supposons que $(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n)_{n\geq n_0}$ une autre solution du système (5.12) avec les conditions initilaes , alors

$$\widetilde{x}_{n+1} = \frac{\alpha}{\widetilde{x}_n \widetilde{y}_n^2}, \quad \widetilde{y}_{n+1} = \frac{\beta \widetilde{y}_n}{\widetilde{x}_{n-1} y_{n-1}}$$

donc

$$(x_n, y_n) = (\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n), \quad pour\ n = -1, 0.$$

Et comme

$$\widetilde{x}_{n+1} = \frac{\alpha}{\widetilde{x}_n \widetilde{y}_n^2}, \quad \widetilde{y}_{n+1} = \frac{\beta \widetilde{y}_n}{\widetilde{x}_{n-1} y_{n-1}}$$

on obtient que

$$(x_1, y_1) = (\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1)$$

De même on obtient

$$(x_n, y_n) = (\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n), \quad pour\ n = 2, 3, \ldots$$

Alors

$$(x_n, y_n) = (\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n), \quad pour\ n \geq 0.$$

Par conséquent on a l'unisité de solution de l'équation (5.12) avec les conditions initiales (2.2).

2. Soit $(\overline{x},\overline{y})$ un point d'équilibre du (5.12), donc

$$\overline{x}=\frac{\alpha}{\overline{xy}^2},\quad \overline{y}=\frac{\beta\overline{y}}{\overline{xy}}\Rightarrow(\overline{xy})^2=\alpha,\quad \overline{xy}=\beta$$

Les points d'équilibres exists si et seulement si $\beta^2=\alpha$.

3. On a

$$\begin{cases} x_{n+2}=\dfrac{\alpha}{x_{n+1}y_{n+1}^2}=\dfrac{x_nx_{n-1}^2y_{n-1}^2}{\beta^2}\\ x_{n+3}=\dfrac{\alpha}{x_{n+2}y_{n+2}^2}=\dfrac{\alpha}{\beta^2}x_n\end{cases}\qquad \begin{cases} y_{n+2}=\dfrac{\beta y_{n+1}}{x_ny_n}=\dfrac{\beta^2}{x_nx_{n-1}y_{n-1}}\\ y_{n+3}=\dfrac{\beta y_{n+2}}{x_{n+1}y_{n+1}}=\dfrac{\beta^2}{\alpha}y_n.\end{cases}$$

4. **a)** Une condition nécéssaire et suffisante pour que la solution du système (5.12) est périodique de période 3 est $\beta^2=\alpha$.

   b) La forme explicite de la solution dans ce cas est

$$\begin{cases} x_{3n}=x_0\\ x_{3n+1}=\dfrac{\alpha}{x_0y_0^2}\\ x_{3n+2}=\dfrac{x_0x_{-1}^2y_{-1}^2}{\beta^2}\end{cases}\qquad \begin{cases} y_{3n}=y_0\\ y_{3n+1}=\dfrac{\beta y_0}{x_{-1}y_{-1}}\\ y_{3n+2}=\dfrac{\beta^2}{x_0x_{-1}y_{-1}}\end{cases}\qquad n\geq 0$$

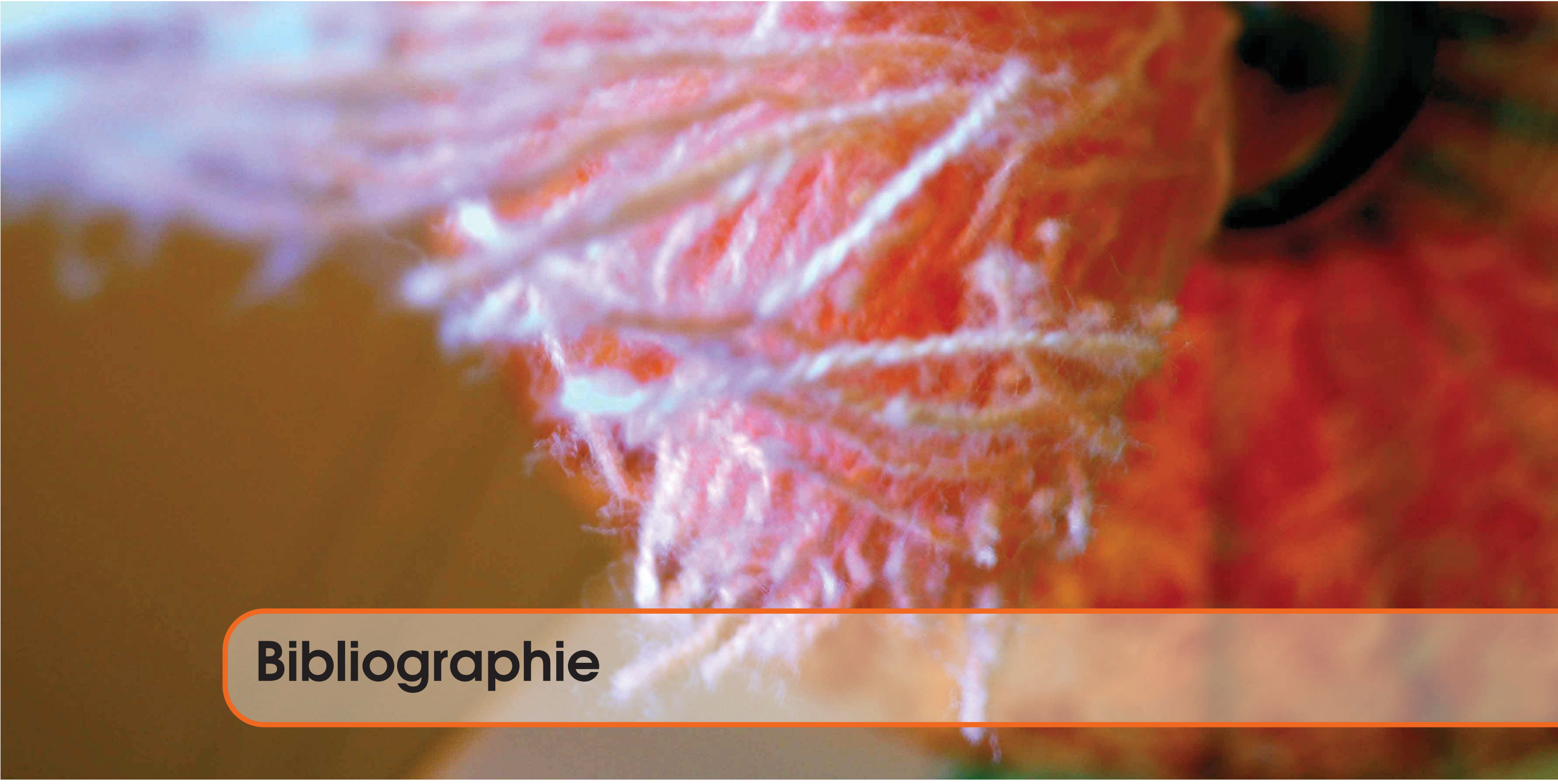
.

5. La forme explicite de la solution du (5.12) lorsque la solution n'est pas éventuellement périodique.

   On a $x_{n+3}=\dfrac{\alpha}{\beta^2}x_n,\quad y_{n+3}=\dfrac{\beta^2}{\alpha}y_n,\quad n\geq 1$, donc

$$\begin{cases} x_{3n}=\left(\dfrac{\alpha}{\beta^2}\right)^n x_0\\ x_{3n+1}=\left(\dfrac{\alpha}{\beta^2}\right)^n\dfrac{\alpha}{x_0y_0^2}\\ x_{3n+2}=\left(\dfrac{\alpha}{\beta^2}\right)^n\dfrac{x_0x_{-1}^2y_{-1}^2}{\beta^2}\end{cases}\qquad \begin{cases} y_{3n}=\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)^n y_0\\ y_{3n+1}=\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)^n\dfrac{\beta y_0}{x_{-1}y_{-1}}\\ y_{3n+2}=\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)^n\dfrac{\beta^2}{x_0x_{-1}y_{-1}}\end{cases}\qquad n\geq 0$$

.



Bibliographie

[1] **A. M. Amleh, N. Kruse and G. Ladas**, *On a class of difference equations with strong negative feedback*, J. Differ. Equations Appl., 5(1999), 497-515.

[2] **C. W. Clark**, *A delayed recruitement of a population dynamics with an application to baleen whale population*, J. Math. Biol., 3 (1976), 381-391.

[3] **S. Elaydi**, *An Introduction to Difference Equations*, Undergraduate Texts in Mathematics, New York, USA, Springer, 1999.

[4] **E. A. Grove and G. Ladas**, *Periodicities in nonlinear difference equations*, Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, 2004.

[5] **A. F. Horadam**, *Basic Properties of a Certain Generalized Sequence of Numbers*, Fibonacci Q., (33) (1965), 161-176.

[6] **V. L. Kocic and G. Ladas**, *Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[7] **D. Simsek, C. Cinar, I. Yalinkaya**, *On the solutions of the difference equation* $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, x_{n-1}\right\}$, Int. J. Contemp. Math. Sci., 1(2006)(10), 481-487.

[8] **N. Touafek and Y. Halim**, *Global attractivity of a rational difference equation*, Math. Sci. Lett. 2, 2(3) (2013), 161-165.