Centre Universitaire Abdelhafid BOUSSOUF-Mila
Institut de science et de technologie

Département de science et technique
Master II Electromécanique
Module Techniques de Commande Avancés

année universitaire 2023/2024

Corrigé Type

Exercice 02 (08 points)

Soit le système suivant :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

0,25 0,25

1. La matrice $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ **est dite la matrice d'état,** et le système est d'ordre deux.

2. Fonction de transfert du système, $H(s)$.

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 - 3s - 2}$$ — 01,00

3. Stabilité du système

On a le polynôme caractéristique du système

$$D(s) = s^2 - 3s - 2$$

Dont les solutions $s_1 = 3.56 \; et \; s_2 = -0.56$ ce qui implique l'instabilité du système. 0,25

0,25

4. Calcul de la sortie $y(t)$.

On a

$$y(s) = CX(s) = C(sI - A)^{-1}\big(x(0) + BU(s)\big) = C(sI - A)^{-1}\left(x(0) + \frac{1}{s}B\right)$$ — 0,25

$$(sI - A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} s+2 & 4 \\ -2 & s-5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s-5 & -4 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}}{(s+2)(s-5)+8}$$

$$y(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s-5 & -4 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix}}{(s+2)(s-5)+8} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{s} \\ +\frac{1}{s} \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{s(s^2 - 3s - 2)} = \frac{1}{s(s - 3.56)(s + 0.56)}$$

$$= \frac{-0.5}{s} + \frac{0.1}{(s - 3.56)} - \frac{0.6}{(s + 0.56)}$$ — 0,50

$$y(t) = -0.5 + 0.1e^{3.56t} - 0.6e^{-0.56t}$$

— 0,25

5. Commndabilité du système.

On a la matrice de commandabilité

$$M_c = [B \; AB] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ — 0,50

$$\det(M_c) = -1 \neq 0$$ — 0,50

Donc le système est commandable.

6. Forme canonique de commande.

Le changement de base suivant est appliqué

$$\bar{x} = Px$$

où P est la matrice de passage. Donc le système au nouvelle bas est tel que

$$\dot{x} = PAP^{-1}x + P^{-1}Bu$$
$$y = CPx$$

Maintenant, P se calcule comme suit

$$P = M_c W = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & +1 \end{bmatrix}$$ − 0,50

Donc

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$ − 0,50
$$y = [1 \quad 0]x$$

7. Commande par retour d'état $u = -Kx + y_r$ de gain $K = [k_1 \; k_1]$ permettant de placer les pôles en boucle fermée à : $-3 \pm j6$.

On a : 0,25

$P_{bo}(s) = s^2 - 3s - 2$ est le polynôme caractéristique en boucle ouverte, et 0,25

$P_{dés}(s) = s^2 + 6s + 45$ est le polynôme désiré.

$\bar{k}_1 = 45 + 2 = 47$ et $\bar{k}_2 = 6 + 3 = 9$, $\bar{K} = [47 \quad 9]$. 0,25

En fin $K = KP^{-1} = [47 \quad 56]$ 0,25

La commande est telle que $u = -[47 \quad 56]x + y_r$. 0,25

8. Fonction de transfert du système en boucle fermé.

$$H_{bf}(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}B = \frac{1}{s^2 + 6s + 45}$$ − 01,00

9. Valeur finale de la réponse du système en boucle fermée à un échelon unitaire, $U_0 = 1$.

La valeur finale en BF se calcule comme suite

$$y_\infty = H_{bf}(0) = \frac{1}{45}$$ − 01,00

<u>Exercice 02</u> (06 points)

On considère le problème de commande pour le système du deuxième ordre suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Calcul de la commande optimale $u = -Kx$ minimisant le critère suivant :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (x_1^2 + x_2^2 + u^2)\, dt$$

La commande optimale est donnée par $\boldsymbol{u = -R^{-1}B^TPx}$ 0,25

où P est la solution de l'équation de Riccati

$$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$ 0,25

0,25 0,25

et $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $R = 1$.

On calcul la solution de l'équation de Riccati

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

0,50

Ce qui implique 0,5

$$\begin{bmatrix} -p_{12} & p_{11} - p_{12} \\ -p_{22} & p_{21} - p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_{21} & -p_{22} \\ p_{11} - p_{21} & p_{12} - p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}p_{21} & p_{12}p_{22} \\ p_{21}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Il en résulte le système d'équations suivant : 01,00 01,00

$$\begin{cases} -p_{12} - p_{21} - p_{12}p_{21} + 1 = 0 \\ p_{11} - p_{12} - p_{22} - p_{12}p_{22} = 0 \\ p_{11} - p_{21} - p_{22} - p_{21}p_{22} = 0 \\ p_{21} - p_{22} + p_{12} - p_{22} - p_{22}^2 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2p_{12} - p_{12}^2 + 1 = 0 \\ p_{11} - p_{12} - p_{22} - p_{12}p_{22} = 0 \\ 2(p_{12} - p_{22}) - p_{22}^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

D'où

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.37 & 0.41 \\ 0.41 & 0.68 \end{bmatrix}$$ 01,00

En fin

$$u = -R^{-1}B^TPx = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.37 & 0.41 \\ 0.41 & 0.68 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0.41 & 0.68 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$ 0,5

Le gain retour d'état optimal est tel que

$$K = \begin{bmatrix} 0.41 & 0.68 \end{bmatrix}$$ 0,50

Exercice 03 (06 points)

1. Qu'est-ce qui distingue la représentation d'état des autres types de représentations. 0,50
2. Pourquoi la commande par placement de pôles porte-t-il ce nom ? 0,50
3. Quels sont les objectifs de la commande optimale ? 0,50
4. Quelle est la différence entre la régulation optimale et le poursuite optimal ? 0,50
5. Dans quels cas la commande adaptative est-il utilisé ? 0,50
6. Qu'est-ce qui distingue la commande adaptative des autres types de commande. 0,50
7. Quels sont les principaux types de la commande adaptative et expliquez la différence entre eux ? 0,50

4. Soit le système du premier ordre suivant :

$$Y(s) = \frac{1}{s+a} U(s)$$

où a est constante inconnu. Les performances désirées du système sont spécifiées par le modèle de référence suivant :

$$Y_m(s) = \frac{1}{s+2} r(s)$$

Calcul de la commande adaptative par modèle de référence

$\dot{y} + ay = u$ Modèle du système

$\dot{y}_m + 2y_m = r$ Modèle de référence   0,10

On a $\dot{y} + 2y = (u - (a-2)y)$ ce qui implique $\dot{e} = -2e + (u - (a-2)y - r) \equiv -2e + (u - a_y y - r)$ 0,30

où $a_y = a - 2$ et $a_r = 1$. La commande adaptative est alors

0,50

$$u = \hat{a}_r r + y$$

0,10

telle que

$$\dot{\hat{a}}_y = -\gamma_y . e . y$$

0,10

Avec γ_r et γ_y sont des paramètres d'adaptation paramétrique.