Centre Universitaire de Mila — Année universitaire 2023/2024

Institut des Mathématiques et Informatique — Semestre I

Domaine: LMD-Math (1^{er}année) — Durée 1 h 30

Analyse I — 10/01/2024

Examen

Exercice 1: (6 pts)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par la donnée de u_0, v_0 avec $0 < u_0 < v_0$ et les formules de récurrence:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < v_n$. 1,5

2) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes. 2,5

3) En déduire qu'elles convergent vers la même limite. 1 Calculer cette limite. 1

Exercice 2: (7.5 pts)

1) Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \quad 1,5 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad 1,5$$

2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x < e \\ a \ln x + b & \text{si} \quad x \geq e \end{cases}$$ 4,5

- Déterminer les nombres réels a et b pour que g soit dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(x)$.

Exercice 3: (6.5 pts)

1) Montrer que:

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$ 2

2) Montrer que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel. 2,5

3) Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure; si elles existent, de la partie A de $\mathbb{R}$ définie par:

$$A = \left\{ \sin\left(\frac{2n\pi}{7}\right); \quad n \in \mathbb{Z} \right\}$$ 2

Bon courage

Analyse I 1er Math

Corrigé de l'examen

Exo 1 :

1) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < V_n$

pour $n = 0$, nous avons $0 < U_0 < V_0$. 0.5

Supposons que : $0 < U_n < V_n$ et montrons que $0 < U_{n+1} < V_{n+1}$

On a : $U_n > 0$ et $V_n > 0$ donc $U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} > 0$ et $V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} > 0$

nous avons aussi :

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} - \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} = \frac{(U_n+V_n)^2 - 4U_nV_n}{2(U_n+V_n)}$$ 0.5

$$= \frac{U_n^2 + V_n^2 - 2U_nV_n}{2(U_n+V_n)} = \frac{(U_n-V_n)^2}{2(U_n+V_n)} > 0$$ 0.5

Donc : $V_{n+1} - U_{n+1} > 0 \Rightarrow V_{n+1} > U_{n+1}$. Alors

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < V_n$.

2) Montrons que (U_n) et (V_n) sont convergentes :

$$* \; U_{n+1} - U_n = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} - U_n = \frac{2U_nV_n - U_n^2 - U_nV_n}{U_n+V_n}$$

$$= \frac{U_n(V_n - U_n)}{U_n+V_n} > 0 \quad (\text{car } V_n > U_n > 0)$$ 0.5

Donc (U_n) est croissante.

$$* \; V_{n+1} - V_n = \frac{U_n+V_n}{2} - V_n = \frac{U_n - V_n}{2} < 0 \quad (\text{car } V_n > U_n > 0)$$

Donc (V_n) est décroissante. 0.5

et on a : $U_0 < U_n < V_n < V_0$. Donc : 0.5

– La suite (U_n) est croissante et majorée par V_0, alors la suite (U_n) est convergente vers l ($\lim_{n\to+\infty} U_n = l$) 0.5

– La suite (V_n) est décroissante et minorée par U_0, alors la suite (V_n) est convergente vers l' ($\lim_{n\to+\infty} V_n = l'$) 0.5

3) Nous avons : $l \geq 0$ et $l' \geq 0$

et on a $\lim_{n\to\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to\infty} U_n = l$ et $\lim_{n\to\infty} V_{n+1} = \lim_{n\to\infty} V_n = l'$ 0.5

Alors $l = \frac{2ll'}{l+l'}$ et $l' = \frac{l+l'}{2} \Rightarrow l = l'$ 0.5

* Nous remarquons que:

$$v_{n+1} \cdot u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \cdot \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = u_nv_n = \dots\dots = u_0v_0 \quad 0{,}5$$

et par passage à la limite, nous trouvons $\ell\ell' = u_0v_0$

$$\Longrightarrow \ell^2 = u_0v_0 \Longrightarrow \ell = \sqrt{u_0v_0} \quad 0{,}5$$

Donc les deux suites convergentes vers la même limite $\sqrt{u_0v_0}$.

EX 02:

1)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} \quad 0{,}5$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x+1-1+x} \quad 0{,}5$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2} = 1 \quad 0{,}5$$

*
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{-a\sin ax}{\cos ax} \cdot \frac{\cos bx}{-b\sin bx} \quad 0{,}5$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{a^2 \sin ax}{ax} \cdot \frac{bx}{b^2 \sin bx} \cdot \frac{1}{\cos ax} \cdot \cos bx\right) \quad 0{,}5$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{a^2}{b^2} \cdot \underbrace{\frac{\sin ax}{ax}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{bx}{\sin bx}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos ax}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\cos bx}_{\to 1}\right)$$

$$= \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad 0{,}5$$

2) Déterminer les nombres a et b:

On a: $x-1$ dérivable sur $]-\infty, e[$ et $a\ln x + b$ est dérivable sur $]e, +\infty[$, Alors $g(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{e\}$ 0,5

la dérivabilité de g en $x_0 = e$:

On a: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} e} g(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} e} g(x) = g(e) \Longrightarrow e-1 = a+b$ 0,5

$$\Longrightarrow b = e-a-1. \quad 0{,}5$$

et on a:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} e} \frac{g(x)-g(e)}{x-e} = \lim_{x \overset{>}{\to} e} \frac{a\ln x + b - a - b}{x-e} = \lim_{x \overset{>}{\to} e} \frac{a(\ln x - 1)}{x-e}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} e} \frac{a(\ln x - \ln e)}{x-e} = \frac{a}{e}. \quad 0{,}5$$

$$\lim_{\substack{x\to e\\ x>e}} \frac{g(x)-g(e)}{x-e} = \lim_{\substack{x\to e\\ x>e}} \frac{x-1-a-b}{x-e} = \lim_{\substack{x\to e\\ x>e}} \frac{x-\cancel{1}-\cancel{a}-e+\cancel{a}+\cancel{1}}{x-e} = 1$$ 0,5

g dérivable en $x_0=e \iff f'_d(e)=f'_g(e) \Rightarrow \frac{a}{e}=1$ 0,5

$\Rightarrow a=e$ et $b=e-1-a=-1$. Alors

$a=e$ 0,5 et $b=-1$ 0,5

$$* \quad g'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\leq e. \\ \frac{e}{x} & \text{si } x\geq e.\end{cases}$$ 0,5

EXO 3:

1) Montre que: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1)-\ln(n) < \frac{1}{n}$

La fonction $f(x)=\ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$ et donc continue sur $[n,n+1]$, 0,5 elle est dérivable sur $]n,n+1[$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Alors d'après le T.A.F,

$\exists c\in\,]n,n+1[$, $\frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n} = f'(c) = \frac{1}{c}$ 0,5

$\Rightarrow \ln(n+1)-\ln(n)=\frac{1}{c}$

On a: $n<c<n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{n}$ 0,5

$\Rightarrow \frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln(n)<\frac{1}{n}$. 0,5

2) Montre que: $\frac{\ln 3}{\ln 2}\notin\mathbb{Q}$

On suppose que: $\frac{\ln 3}{\ln 2}\in\mathbb{Q}$ 0,5 $\Rightarrow \exists p,q\in\mathbb{Z}, q\neq 0;\ \frac{\ln 3}{\ln 2}=\frac{p}{q}$ 0,5

$\Rightarrow q\ln 3=p\ln 2 \Rightarrow \ln 3^q=\ln 2^p \Rightarrow 3^q=2^p$ 0,5

On a: $\forall p,q>1$, alors $3^q\neq 2^p$ 0,5

et $p=q=1 \Rightarrow 2=3$ impossible

la seule solution de l'équation est $p=0$ et $q=0$ 0,8 (ce qu'est absurde) car $q\neq 0$. Alors: $3^q\neq 2^p$, $\forall p,q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$

Alors $\frac{\ln 3}{\ln 2}\notin\mathbb{Q}$.

3) $A = \{ \sin(\frac{2n\pi}{7}),\ n \in \mathbb{Z} \}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x \in [-1, 1] \Rightarrow A \subset [-1, 1]$

donc A borné $\Rightarrow$ A admet une borne supérieur et une borne inférieur de plus $\sup A \leq 1$ et $\inf A \geq -1$

La fonction $f : x \longrightarrow \sin \frac{2\pi x}{7}$ est périodique et 7 est une période de f. Alors :

0.5

$A = \{ 0, \sin\frac{2\pi}{7}, \sin\frac{4\pi}{7}, \sin\frac{6\pi}{7}, \sin\frac{8\pi}{7}, \sin\frac{10\pi}{7}, \sin\frac{12\pi}{7} \}$

0.5

Alors $\sup A = \sin\frac{4\pi}{7}$, $\inf A = \sin\frac{10\pi}{7} = \sin -\frac{4\pi}{7}$.

0.5 0.5