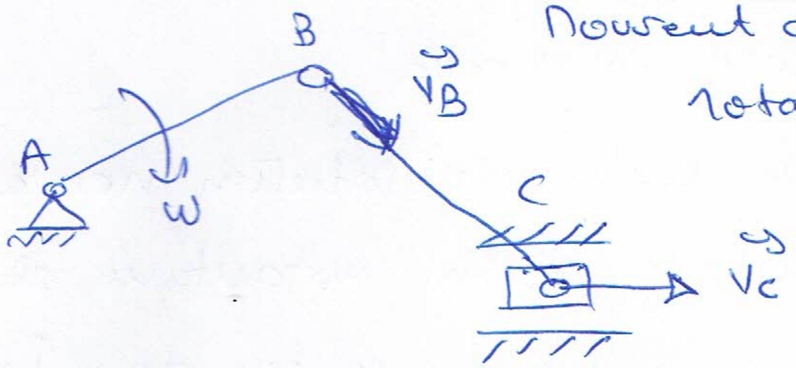
chapitre 04

Cinematique du Solide

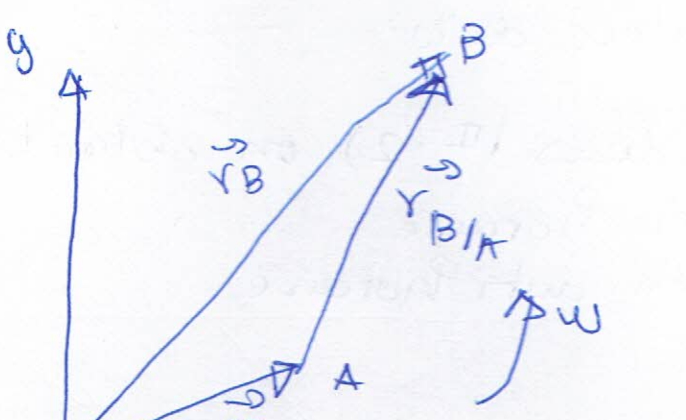
"Mouvement plan"

mouvement gèneral : le mouvement géneral st la combinaison entre le mouvement de translation et du mouvement de rotation



Mouvement de translation + rotation

Si on prend un repere (o, x, y) fixe et on veut connaitre la position + vitesse + acceleration de chaque point du solide (barre AB).



avec : $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_{B/A}$ (Vecteur de position)

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}} \quad \text{... (I)}$$

(1)

* en dérivant l'equation (I) par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{r_B}}{dt} = \frac{d\vec{r_A}}{dt} + \frac{d\vec{r_{B/A}}}{dt} \Rightarrow \vec{V_B} = \vec{V_A} + \vec{V_{B/A}}$$

puisque on une rotation de B autour de A on a :

$$V = W \cdot R \Rightarrow \vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{R} \Rightarrow \vec{V_{B/A}} = \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$$

$$\underbrace{\vec{V_B} = \overbrace{\vec{V_A}}^{\text{translation}} + \overbrace{\vec{\omega} \wedge AB}^{\text{rotation}}}_{\text{mouvement general}}$$

on fait intervien un centre de rotation nouveau du solide qu'on l'appelle le centre instantane de rotation "C.I.R" ou ce point au centre, la vitesse est nulle en un instant t déterminé, donc l'equation II devient

$$\vec{V_A} = \vec{V_P} + \vec{\omega} \wedge \vec{PA} \quad \text{(II.1)} \quad \vec{V_P}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad P = CIR$$

$$\vec{V_B} = \vec{V_P} + \vec{\omega} \wedge \vec{PB} \quad \text{(II.2)}$$

de (II.1) on obtient la valeur de "ω"

de (II.2) on remplace ω dans (II.2) on obtient V_B

$$\vec{\omega}\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix} \begin{cases} \omega < 0 & \text{rotation horaire} \\ \omega > 0 & \text{rotation anti horaire} \end{cases}$$

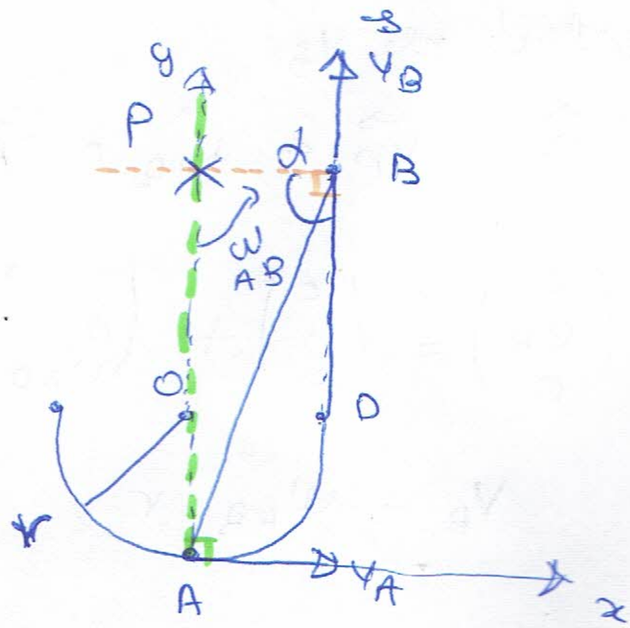
Application Une barre AB de longeur .20 cm se déplace sur un demi Cercle de Rayon $r = 10$ cm le point A se déplace avec une vitesse constante égale à 10 cm/s le point B se déplace le long du trait DB

1/ Designer le C.I.R

2/ calculer la vitesse angulaire de la Barre AB, ω_{AB}?

3/ Calculer la vitesse en B

Solution



2) calcul du ω_{AB}:

on a: $\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{PA}$

$$\begin{pmatrix} V_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -PA \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_A = \omega_{AB} . PA$$

$$\boxed{\omega = \frac{V_A}{PA}}$$

dans le triangle PAB : $\cos\alpha = \frac{PB}{AB} = \frac{r}{AB} = \frac{10}{20}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$

$tg\,\alpha = \frac{PA}{PB} \Rightarrow PA = PB\,tg\alpha = r\,tg\alpha = 10\,tg\,60°$

$PA = 17,3$ cm

$\Rightarrow \omega_{AB} = \frac{10}{17,3} \Rightarrow \omega_{AB} = 0,578$ [rd/s]

3/ Calcul de V_B :

$\vec{V_B} = \vec{V_P} + \vec{\omega_{AB}} \wedge \vec{PB}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ V_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} PB \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_B = \omega_{AB} \cdot PB$

$V_B = \omega_{AB} \cdot r$

$V_B = 0,578 \cdot 10 \Rightarrow V_B = 5,78$ [cm/s]