(a) L'alphabet ;

(b) Les formules de T ;

(c) Un sous ensemble de formules formant les axiomes ;

(d) Une ou plusieurs règles d'inférence.

2. Une preuve dans T est une séquence de formules $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, telles que chaque α_i est soit un axiome, soit un théorème déjà démontré, soit obtenue à partir de l'application d'une des règles d'inférence.
3. Si une formule α admet une preuve, on dit que α est démontrable ou α est un théorème et on note $\vdash \alpha$.
4. Une déduction (ou démonstration) d'une formule α à partir d'un certain ensemble de formules Γ est une séquence de formules $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ telles que $\alpha_n = \alpha$ et chaque α_i est soit un axiome, soit un théorème déjà démontré, soit une formule de Γ, soit obtenue à partir de l'application d'une des règles d'inférence. Et on note $\Gamma \vdash \alpha$.

Dans le cadre de notre cours, on convient de considérer l'alphabet et les formules du calcul propositionnel.

2.2 Liste des axiomes

La liste des axiomes peut varier d'un auteur à un autre ou d'une institution à une autre. Les axiomes sont des formules dont on admet qu'elles sont des théorèmes sans pouvoir leur donner une démonstration formelle.
Nous donnons ici la liste des axiomes de Hilbert-Ackerman (H.A) ; et on considère le système complet de connecteurs $\{\neg, \vee\}$.

Définition 2.1. L'expression $x \Rightarrow y$ n'est qu'une abréviation de l'écriture $\overline{x} \vee y$.

Les axiomes d'H. A sont :

1. $(H.A)_1 \quad (x \vee x) \Rightarrow x$;
2. $(H.A)_2 \quad x \Rightarrow x \vee y$;
3. $(H.A)_3 \quad x \vee y \Rightarrow y \vee x$;
4. $(H.A)_4 \quad (x \Rightarrow y) \Rightarrow (z \vee x \Rightarrow z \vee y)$.

2.3 Les règles ou schémas de déduction

Les règles de déduction ont pour objet la déduction de nouveaux théorèmes à partir de théorèmes connus. Une règle de déduction n'est pas un axiome mais en quelque sorte un procédé permettant d'obtenir de nouveaux théorèmes.

2.3.1 Règle de détachement (ou Modus Ponens)

Contrairement à la liste des axiomes et les autres règles de déduction, la règle du Modus Ponens est commune à toutes les théorie. Le terme Modus Ponens (ou plus exactement Modus Ponendo Ponens) vient de ce que l'on pose α (Ponens est le participe présent de verbe latin Ponere, poser) afin d'en tirer la conclusion. Elle est donnée comme suit :

$$\text{De} \quad \vdash \alpha, \quad \vdash \alpha \Rightarrow \beta, \quad \text{on déduit} \quad \vdash \beta.$$

cette règle peut être formulée ainsi : soient deux formules α et β, telles que α et $\alpha \Rightarrow \beta$ sont des théorèmes, alors β est un théorème.

On peut utiliser un schéma pour illustrer cette règle : $\dfrac{\begin{array}{l}\vdash \alpha \\ \vdash \alpha \Rightarrow \beta\end{array}}{\vdash \beta}$

Cette figure fait bien apparaître pourquoi la règle s'appelle *règle de détachement* : elle permet de détacher le conséquent β de l'antécédent α dans l'implication $\alpha \Rightarrow \beta$, pourvu que $\vdash \alpha$ et $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

2.3.2 Règle de substitution

Cette règle est indispensable pour les théorie où les axiomes sont donnés avec des variables propositionnelles (comme le cas de la théorie d'H.A.).

Soit α un théorème dans lequel figure la variable propositionnelle x, alors pour toute formule β (où β n'est pas nécessairement un théorème), la substitution de β à x en chacune de ses occurrences engendre un théorème.

Autrement dit :

$$\text{De} \quad \vdash \alpha, \quad \text{on déduit} \quad \vdash \alpha(x := \beta)$$

Exemple 2.3.1. Montrons le théorème $\vdash \overline{x} \vee x$.

Démonstration. Nous proposons la preuve suivante :

(1) $(x \vee x) \Rightarrow x$	$(H.A)_1$
(2) $x \Rightarrow x \vee y$	$(H.A)_2$
(3) $x \Rightarrow x \vee x$	sub $y := x$ dans (2)
(4) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (z \vee x \Rightarrow z \vee y)$	$(H.A)_4$
(5) $(x \vee x \Rightarrow y) \Rightarrow (z \vee (x \vee x) \Rightarrow z \vee y)$	sub $x := x \vee x$ dans (4)
(6) $(x \vee x \Rightarrow x) \Rightarrow (z \vee (x \vee x) \Rightarrow z \vee x)$	sub $y := x$ dans (5)
(7) $(z \vee (x \vee x) \Rightarrow z \vee x)$	Modus Ponens (1,6)
(8) $(\overline{z} \vee (x \vee x) \Rightarrow \overline{z} \vee x)$	sub $z := \overline{z}$ dans (7)
(9) $(z \Rightarrow (x \vee x)) \Rightarrow (z \Rightarrow x)$	abréviation
(10) $(x \Rightarrow (x \vee x)) \Rightarrow (x \Rightarrow x)$	sub $z := x$ dans (9)
(11) $x \Rightarrow x$	Modus Ponens (3,10)
(12) $\overline{x} \vee x$	Définition de $\Rightarrow$.

□

Les démonstrations donnent rapidement lieu à des textes de longueur démesurée. On peut arriver plus vite au but en prenant des raccourcis qui consistent à adopter des *Règles dérivées*.

2.3.3 Règle S

Soient α, β, γ des formules. Alors

$$\text{de } \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ et } \vdash \beta \Rightarrow \gamma \text{ on déduit } \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$$

Démonstration. La preuve de cette règle est :

(1) $\alpha \Rightarrow \beta$	Hypothèse
(2) $\beta \Rightarrow \gamma$	Hypothèse
(3) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (z \vee x \Rightarrow z \vee y)$	$(H.A)_4$
(4) $(\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\overline{\alpha} \vee \beta \Rightarrow \overline{\alpha} \vee \gamma)$	sub $(x := \beta,\ y := \gamma,\ z := \overline{\alpha})$
(5) $(\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$	Abréviation
(6) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$	Modus Ponens $(5, 2)$
(7) $\alpha \Rightarrow \gamma$	Modus Ponens $(6, 1)$.

□

2.3.4 Règles I

$$\text{De } \vdash \alpha \vee \alpha \text{ on déduit } \vdash \alpha.$$

Démonstration. La preuve de cette règle est :

(1) $(x \vee x) \Rightarrow x$ $\quad (H.A)_1$
(2) $(\alpha \vee \alpha) \Rightarrow \alpha$ $\quad$ sub $(x := \alpha)$
(3) $\alpha \vee \alpha$ $\quad$ Hypothèse
(4) α $\quad$ Modus Ponens $(2, 3)$.

□

2.3.5 Règles II

$$\text{De } \vdash \alpha \text{ on déduit } \vdash \alpha \vee \beta.$$

Démonstration. La preuve de la règle II est :
(1) $x \Rightarrow x \vee y$ $\quad (H.A)_2$
(2) $\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta$ $\quad$ sub $(x := \alpha,\ y := \beta)$
(3) α $\quad$ Hypothèse
(4) $\alpha \vee \beta$ $\quad$ Modus Ponens $(2, 3)$.

□

2.3.6 Règles III

$$\text{De } \vdash \alpha \vee \beta \text{ on déduit } \vdash \beta \vee \alpha.$$

Démonstration. La preuve de la règle III est :
(1) $x \vee y \Rightarrow y \vee 3$ $\quad (H.A)_3$
(2) $\alpha \vee \beta \Rightarrow \beta \vee \alpha$ $\quad$ sub $(x := \alpha,\ y := \beta)$
(3) $\alpha \vee \beta$ $\quad$ Hypothèse
(4) $\beta \vee \alpha$ $\quad$ Modus Ponens $(2, 3)$.

□

2.3.7 Règles IV

$$\text{De } \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ on déduit } \vdash \gamma \vee \alpha \Rightarrow \gamma \vee \beta.$$

Démonstration. La preuve de la règle IV est :
(1) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (z \vee x \Rightarrow z \vee y)$ $\quad (H.A)_4$
(2) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\gamma \vee \alpha \Rightarrow \gamma \vee \beta)$ $\quad$ sub $(x := \alpha,\ y := \beta,\ z := \gamma)$
(3) $\alpha \Rightarrow \beta$ $\quad$ Hypothèse
(4) $\gamma \vee \alpha \Rightarrow \gamma \vee \beta$ $\quad$ Modus Ponens $(2, 3)$.

□

Définition 2.2. L'expression $x \wedge y$ est une abréviation permettant d'écrire $\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$.

2.3.8 Règles V

$$\text{De } \vdash \alpha \text{ et } \vdash \beta \text{ on déduit } \vdash \alpha \wedge \beta \text{ et réciproquement.}$$

Démonstration. La démonstration de cette règle se fait en trois partie. D'abord, on démontre que

$$\text{De } \vdash \alpha \text{ et } \vdash \beta \text{ on déduit } \vdash \alpha \wedge \beta.$$

Pour ce faire, on procède comme suit :

1. On démontre le théorème $x \Rightarrow (y \Rightarrow (x \wedge y))$;
2. Faire les substitutions adéquates ;
3. Obtenir le résultat en utilisant le Modus Ponens.

Ensuite, on démontre la réciproque
De $\vdash \alpha \wedge \beta$ on déduit $\vdash \alpha$ et de même, on déduit $\vdash \beta$. On procède de la manière suivante :

1. On démontre le théorème $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (y \Rightarrow x)$;
2. On utilise $(H.A)_2$;
3. Quelques substitutions et abréviations, on obtient le résultats.

□

Définition 2.3. L'expression $x \Leftrightarrow y$ est une abréviation permettant d'écrire la formule $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$.

Il est impossible de donner une liste complète des théorèmes du calculs des propositions car elle est infinie. Néanmoins, on peut donner les plus utilisés.
Ces théorèmes, combinés avec les règles de déduction ainsi que les règles dérivées, permettent de démontrer les autres théorèmes du calcul des propositions.

2.4 Liste des théorèmes

Les théorèmes les plus connus sont :

(1) $x \vee x \Leftrightarrow x$, $x \Leftrightarrow x \vee x$	Lois de *tautologie* ;
(2) $x \Leftrightarrow \overline{\overline{x}}$	Loi de la double négation ;
(3) $\overline{x} \vee x$	Loi du tiers exclu ;
(4) $x \vee \overline{x}$	Loi du tiers exclu (autre forme) ;
(5) $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\overline{y} \Rightarrow \overline{x})$	Loi de contraposition ;
(6) $x \vee (y \vee z) \Leftrightarrow (x \vee y) \vee z$	Associativité de $\vee$;
(7) $x \wedge (y \wedge z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \wedge z$	Associativité de $\wedge$;
(8) $\overline{x \wedge y} \Leftrightarrow \overline{x} \vee \overline{y}$	Loi de De Morgan ;
(9) $\overline{x \vee y} \Leftrightarrow \overline{x} \wedge \overline{y}$	Loi de De Morgan (autre forme) ;
(10) $x \Rightarrow (y \Rightarrow (x \wedge y))$;	
(11) $x \wedge (y \vee z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	Distribution de $\wedge$ sur $\vee$;
(12) $x \vee (y \wedge z) \Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	Distribution de $\vee$ sur $\wedge$;
(13) $x \vee y \Leftrightarrow y \vee x$	Commutativité de $\vee$;
(14) $x \wedge y \Leftrightarrow y \wedge x$	Commutativité de $\wedge$;
(15) $x \wedge y \Rightarrow x$;	
(16) $x \Rightarrow x \vee y$;	
(17) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow y))$;	
(18) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$.	

Dans ce qui suit, nous donnons quelques définitions nécessaires à la présentation et à la démonstration du plus important résultat du calcul des propositions qui est le théorème fondamental.

Définition 2.4. Deux formules α et β sont dites équivalentes si $\vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$.

Exemple 2.4.1. Les deux formules $x \Rightarrow y$ et $\overline{y} \Rightarrow \overline{x}$ sont équivalentes.

Définition 2.5. On appelle *monôme disjonctif* par rapport aux variables $x, y, z, \ldots$, une formule présentant les caractéristiques suivantes :

– Chaque variable présente exactement une occurrence. Cette variable peut être surmontée d'une barre.
– Outre les variables, le monôme disjonctif ne comporte que le connecteur $\vee$.

Exemple 2.4.2. x, $\overline{x}$, $x \vee \overline{y}$, $x \vee y \vee \overline{z}$.

Définition 2.6. Une formule α qui se présente sous la forme $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des monômes disjonctifs, est dite formule sous *forme normale conjonctive*.

2.5 Exercices

Exercice 2.1. Dans le système d'axiomes d'H.A., montrer les règles de déduction suivantes :

1. $\alpha \Rightarrow \gamma$, $\beta \Rightarrow \sigma$,$\overline{\gamma} \vee \overline{\sigma} \vdash \overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$.
2. $\alpha \Rightarrow \beta$, $\gamma \Rightarrow \sigma$, $\vdash \alpha \wedge \gamma \Rightarrow \beta \vee \sigma$.

Exercice 2.2. Montrer que les formules suivantes sont des théorèmes :

1. $\overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \beta$;
2. $\beta \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}$;
3. $\overline{\alpha} \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$;
4. $(\overline{\beta} \rightarrow \overline{\alpha} \Rightarrow ((\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow \beta)$;
5. $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha})$;
6. $\alpha \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{(\alpha \Rightarrow \beta)})$;
7. $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\overline{\alpha} \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta)$.

Exercice 2.3. Soit le système d'axiomes suivant :
$A1$: $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$;
$A2$: $(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$;
$A3$: $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$.
et la règle du Modus Ponens Si $\vdash \alpha$ et $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$, alors $\vdash \beta$.
Montrer que l'on a :
de $\vdash \alpha$, on déduit $\vdash \beta \Rightarrow \alpha$;
De $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta)$, et $(\beta \Rightarrow \gamma)$ on déduit $(\alpha \Rightarrow \gamma)$;
de $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$ on déduit $\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$.

Exercice 2.4. En utilisant éventuellement les résultats de l'exercice précédent, montrer formellement que les formules suivantes sont des théorèmes du calcul propositionnel :

1. $(q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$;
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$.

2.6 Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 2.1. 1. Montrons que : $\alpha \Rightarrow \gamma, \beta \Rightarrow \sigma, \overline{\gamma} \vee \overline{\sigma} \Rightarrow \overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$.

Preuve :

(1) $\alpha \Rightarrow \gamma$	Hypothèse 1 ;
(2) $\beta \Rightarrow \sigma$	Hypothèse 2 ;
(3) $\overline{\gamma} \vee \overline{\sigma}$	Hypothèse 3 ;
(4) $\overline{\sigma} \vee \overline{\gamma}$	Règle III sur (3) ;
(5) $\sigma \Rightarrow \overline{\gamma}$	Abréviation $\Rightarrow$;
(6) $\beta \Rightarrow \overline{\gamma}$	Règle S (2, 5) ;
(7) $\overline{\beta} \vee \overline{\gamma}$	Définition $\Rightarrow$;
(8) $\overline{\gamma} \vee \overline{\beta}$	Règle III sur (7) ;
(9) $\gamma \Rightarrow \overline{\beta}$	Abréviation $\Rightarrow$;
(10) $\alpha \Rightarrow \overline{\beta}$	Règle S (1, 9) ;
(11) $\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$	Définition $\Rightarrow$.

□

2. Montrons que : $\alpha \Rightarrow \beta, \gamma \Rightarrow \sigma \;\vdash\; \alpha \wedge \gamma \Rightarrow \beta \vee \sigma$.

Preuve :

(1) $\alpha \Rightarrow \beta$	Hypothèse 1 ;
(2) $\gamma \Rightarrow \sigma$	Hypothèse 2 ;
(3) $x \Rightarrow (x \vee y)$	$(H.A)_2$;
(4) $\beta \Rightarrow \beta \vee \sigma$	Substitution $(x := \beta, y := \sigma)$ dans (3) ;
(5) $\alpha \Rightarrow \beta \vee \sigma$	Règle S (1, 4) ;
(6) $(x \wedge y) \Rightarrow x$	Théorème 15.
(7) $(\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow \alpha$	Substitution $(x := \alpha, y := \gamma)$ dans (6) ;
(8) $(\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow \beta \vee \sigma$	Règle S (7, 5).

□

Corrigé de l'exercice 2.2. 1. Montrons que : $\vdash \overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \beta$.

Preuve :

Remarque 2.6.1. Nous allons démontrer la condition suffisante de ce théorème. Donc, on peut supposer que la condition nécessaire est démontrée et l'utiliser mais on ne peut pas utiliser le théorème en entier directement.

(1) $x \Rightarrow \overline{\overline{x}}$	Théorème 2 ;
(2) $\overline{x} \vee \overline{\overline{x}}$	Définition de $\Rightarrow$;
(3) $\overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{\overline{x}}}$	Substitution ($x := \overline{x}$) dans (2) ;
(4) $\overline{x} \Rightarrow \overline{\overline{\overline{x}}}$	Abréviation de $\Rightarrow$;
(5) $x \vee \overline{x} \Rightarrow x \vee \overline{\overline{\overline{x}}}$	Règle IV ;
(6) $x \vee \overline{x}$	Théorème 4 ;
(7) $x \vee \overline{\overline{\overline{x}}}$	Modus Ponens (6, 5) ;
(8) $\beta \vee \overline{\overline{\overline{\beta}}}$	Substitution ($x := \beta$) ;
(9) $\overline{\overline{\overline{\beta}}} \vee \beta$	Règle III ;
(10) $\overline{\overline{\beta}} \Rightarrow \beta$	Abréviation $\Rightarrow$.

□

2. Montrons que : $\vdash \beta \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}$.

Preuve :

(1) $x \vee \overline{x}$	Théorème 4 ;
(2) $\overline{\beta} \vee \overline{\overline{\beta}}$	Substitution ($x := \overline{\beta}$) dans (1) ;
(3) $\beta \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}$	Abréviation $\Rightarrow$.

□

3. Montrons que : $\vdash \overline{\alpha} \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$.

Preuve :

(1)] $x \Rightarrow (x \vee y)$	$(H.A)_2$;
(2)] $\overline{\alpha} \Rightarrow (\overline{\alpha} \vee \beta)$	Substitution ($x := \overline{\alpha}, y := \beta$) dans (1) ;
(3)] $\overline{\alpha} \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$	Abréviation $\Rightarrow$.

□

4. Montrons que : $\vdash (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow [(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta]$.

Preuve :

(1) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow [(z \vee x) \Rightarrow (z \vee y)]$ — $(H.A)_4$;
(2) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow [(\beta \vee \alpha) \Rightarrow (\beta \vee \beta)]$ — Substitution $(x := \alpha, y := \beta, z := \beta)$;
(3) $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\overline{y} \Rightarrow \overline{x})$ — Théorème 5 ;
(4) $\left[(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\overline{y} \Rightarrow \overline{x})\right] \wedge \left[(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow y)\right]$ — Définition $\Leftrightarrow$;
(5) $\left[(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow y)\right]$ — Règle V ;
(6) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$ — Substitution $(x := \alpha, y := \beta)$;
(7) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow \left[(\beta \vee \alpha) \Rightarrow (\beta \vee \beta)\right]$ — Règle S (2, 6) ;
(8) $(x \vee x) \Rightarrow x$ — $(H.A)_1$;
(9) $(\beta \vee \beta) \Rightarrow \beta$ — Substitution $(x := \beta)$ dans (8) ;
(10) $\left[\overline{(\beta \vee \alpha)} \vee (\beta \vee \beta)\right] \Rightarrow \left[\overline{(\beta \vee \alpha)} \vee \beta\right]$ — Règle IV ;
(11) $\left[(\beta \vee \alpha) \Rightarrow (\beta \vee \beta)\right] \Rightarrow \left[(\beta \vee \alpha) \Rightarrow \beta\right]$ — Abréviation $\Rightarrow$;
(12) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow \left[(\beta \vee \alpha) \Rightarrow \beta\right]$ — Règle S(7, 11) ;
(13) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow \left[(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta\right]$ — Abréviation $\Rightarrow$.

□

5. Montrons que : $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha})$.

Preuve :
(1) $(x \vee y) \Rightarrow (y \vee x)]$ — Théorème 13 ;
(2) $(\overline{\alpha} \vee \beta) \Rightarrow (\beta \vee \overline{\alpha})]$ — Substitution $(x := \overline{\alpha}, y := \beta)$;
(2) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha})$ — Abréviation $\Rightarrow$.

□

6. Montrons que : $\vdash \alpha \Rightarrow \left[\overline{\beta} \Rightarrow \overline{(\alpha \Rightarrow \beta)}\right]$.

Preuve :
(1) $x \vee (y \vee z) \Leftrightarrow (x \vee y) \vee z$ — Théorème 6 ;
(2) $\left[x \vee (y \vee z) \Rightarrow (x \vee y) \vee z\right] \wedge \left[(x \vee y) \vee z \Rightarrow x \vee (y \vee z)\right]$ — Définition $\Leftrightarrow$;
(3) $\left[(x \vee y) \vee z \Rightarrow x \vee (y \vee z)\right]$ — Règle V ;
(4) $\left[(\overline{\alpha} \vee \overline{\overline{\beta}}) \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}\right] \Rightarrow \overline{\alpha} \vee (\overline{\overline{\beta}} \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)})$ — Substitution $(x := \overline{\alpha},$ $y := \overline{\overline{\beta}}, z := \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)})$.

(5) $\beta \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}$	Théorème de la question 2 ;
(6) $(\overline{\alpha} \vee \beta) \Rightarrow (\overline{\alpha} \vee \overline{\overline{\beta}})$	Règle IV ;
(7) $\overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)} \vee (\overline{\alpha} \vee \overline{\overline{\beta}})$	Définition $\Rightarrow$;
(8) $(\overline{\alpha} \vee \overline{\overline{\beta}}) \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}$	Règle III ;
(9) $\overline{\alpha} \vee \left[\overline{\overline{\beta}} \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}\right]$	Modus Ponen (8, 4) ;
(10) $\alpha \Rightarrow \left[\overline{\overline{\beta}} \vee \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}\right]$	Définition de $\Rightarrow$;
(11) $\alpha \Rightarrow \left[\overline{\beta} \Rightarrow \overline{(\overline{\alpha} \vee \beta)}\right]$	Définition de $\Rightarrow$;
(12) $\alpha \Rightarrow \left[\overline{\beta} \Rightarrow \overline{(\alpha \Rightarrow \beta)}\right]$	Définition de $\Rightarrow$.

□

7. Montrons que : $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \left[(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta\right]$.

Preuve :

(1) $(\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow \left[(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta\right]$	Théorème démontré dans la question 4 ;
(2) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha})$	Théorème démontré dans la question 5 ;
(3) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \left[(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta\right]$	Règle S(1,2) ;
(4) $(\overline{y} \Rightarrow \overline{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow y)$	Théorème 5 ;
(5) $(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)$	Substitution $x := \overline{\beta}, y := \alpha$;
(6) $(\beta \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})$	Théorème de la question 2 ;
(7) $(\overline{\overline{\alpha}} \vee \beta) \Rightarrow (\overline{\overline{\alpha}} \vee \overline{\beta})$	Règle IV ;
(8) $(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})$	Abréviation de $\Rightarrow$;
(9) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\overline{y} \Rightarrow \overline{x})$	Théorème 5 ;
(10) $\left[(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})\right] \Rightarrow \left[(\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}}) \Rightarrow (\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \beta})\right]$	sub $x := (\overline{\alpha} \Rightarrow \beta); y := (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})$;
(11) $(\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}}) \Rightarrow (\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \beta})$	Modus Ponens (8,10) ;
(12) $\left[\beta \vee (\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}})\right] \Rightarrow \left[\beta \vee (\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \beta})\right]$	Règle IV ;
(13) $(x \vee y) \Rightarrow (y \vee x)$	$(H.A.)_3$;
(14) $\left[(\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}}) \vee \beta\right] \Rightarrow \left[\beta \vee (\overline{\overline{\alpha} \vee \overline{\overline{\beta}}})\right]$	Sub $x := (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}); y := \beta$;
(15) $\left[(\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}}) \vee \beta\right] \Rightarrow \left[\beta \vee (\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \beta})\right]$	Règle S(14, 12) ;
(16) $\left[(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow \beta\right] \Rightarrow \left[\beta \vee (\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \beta})\right]$	Abréviation $\Rightarrow$.
(17) $\left[\beta \vee (\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \beta})\right] \Rightarrow \left[(\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \beta}) \vee \beta\right]$	Sub $(x := \beta; y := (\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \beta}))$ dans $(H.A.)_3$;
(18) $\left[(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow \beta\right] \Rightarrow \left[(\overline{\overline{\alpha} \Rightarrow \beta}) \vee \beta\right]$	Règle S(16, 17) ;
(19) $\left[(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow \beta\right] \Rightarrow \left[(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta\right]$	Abréviation $\Rightarrow$;
(20) $\left[(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)\right] \Rightarrow \left[(\overline{\overline{\beta} \Rightarrow \alpha}) \Rightarrow (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})\right]$	Sub $(x := (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}), y := (\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)$;

(21) $\left[\overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)} \Rightarrow \overline{(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})}\right]$	Modus Ponens (5, 20) ;
(22) $\left[\beta \vee \overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)}\right] \Rightarrow \left[\beta \vee (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})\right]$	Règle IV ;
(23) $\left[\overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)} \vee \beta\right] \Rightarrow \left[\beta \vee \overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)}\right]$	Sub $(x := \overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)}; y := \beta)$ dans $(H.A.)_3$;
(24) $\left[\overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)} \vee \beta\right] \Rightarrow \left[\beta \vee (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})\right]$	Règle S(22, 23) ;
(25) $\left[\beta \vee \overline{(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})}\right] \Rightarrow \left[\overline{(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})} \vee \beta\right]$	Substitution $(x := \beta; y := (\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}))$ dans $(H.A.)_3$;
(26) $\left[\overline{(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha)} \vee \beta\right] \Rightarrow \left[\overline{(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}})} \vee \beta\right]$	Règle S(24, 25) ;
(27) $\left[(\overline{\beta} \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta\right] \Rightarrow \left[(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow \beta\right]$	Abréviation $\Rightarrow$;
(28) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \left[(\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\overline{\beta}}) \Rightarrow \beta\right]$	Règle S(3, 27) ;
(29) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \left[(\overline{\alpha} \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta\right]$	Règle S(28, 19).

$\square$

Corrigé de l'exercice 2.3. On a le système d'axiomes suivant :

$$\begin{cases} A_1 : \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha); \\ A_2 : \left[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\right] \Rightarrow \left[(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\right]; \\ A_3 : (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha}) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta); \\ \text{Modus Ponens} : \vdash \alpha \text{ et } \vdash \alpha \Rightarrow \beta \text{ alors, } \vdash \beta. \end{cases}$$

1. Montrons que : $\vdash \alpha$, on déduit $\vdash (\beta \Rightarrow \alpha)$ (qu'on nommera après $\mathcal{R}_1$).

Preuve :

(1) $\vdash \alpha$	Hypothèse ;
(2) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$	A_1 ;
(3) $(\beta \Rightarrow \alpha)$	Modus Ponens (1, 2).

$\square$

2. Montrons que de $\vdash (\alpha \Rightarrow \beta)$, et $\vdash (\beta \Rightarrow \gamma)$, on déduit $\vdash (\alpha \Rightarrow \gamma)$ (qu'on nommera après $\mathcal{R}_2$).

Preuve :

(1) $(\beta \Rightarrow \gamma)$	Hypothèse ;
(2) $\left[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\right]$	Application du résultat de la question 1 du même exercice ($\mathcal{R}_1$) ;
(3) $\left[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\right] \Rightarrow \left[(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\right]$	A_2 ;
(4) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$	Modus Ponens (3, 2) ;
(5) $\alpha \Rightarrow \beta$	Hypothèse ;
(6) $\alpha \Rightarrow \gamma$	Modus Ponens (4, 3).

$\square$