Centre universitaire Abedelhafid Boussouf – Mila
Institut des sciences et technologie
Département de mathématiques et informatique
1er année Master : Intelligence artificielle et ses applications – Année: 2023-2024
Matière : Modélisation et Simulation
Responsable de la matière : Dr. Sadek Benhammada

Table de matières

Lois de probabilités théoriques

1 Théorie de probabilités : rappel

1.1 Univers, évènements

Définition 1. En probabilité, on appelle **univers** (*Sample space*), noté $\boldsymbol{\Omega}$, l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.
Les éléments $\boldsymbol{\omega}$ de l'ensemble Ω sont appelés des **évènements élémentaires**

Exemples

- Le lancer d'un dé : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- Le lancer de deux dés : $\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(6,5),(6,6)\}$, ensemble des couples formés par les deux chiffres (avec ordre)

Définition 2.

On appelle événement (*event*) tout sous-ensemble de Ω.

On dira qu'un événement A est réalisé lorsque l'évènement élémentaire $\boldsymbol{\omega}$ effectivement réalisée est un élément de A, c'est-à-dire lorsque $\omega \in A$.

Exemple : lancer d'un dé à six faces

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- Les évènements A, B, C:

A: Obtenir un six	$A = \{6\}$
B: Obtenir un nombre pair	$B = \{2,4,6\}$
C: Obtenir un nombre ≥ 4	$C = \{4,5,6\}$

Définition 3. L'ensemble de tous les sous-ensembles possibles de Ω est appelé l'ensemble des parties de Ω et est noté $\mathcal{P}(\Omega)$.

Terminologie des évènements aléatoires

Évènement = sous-ensemble de Ω, élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Langage probabiliste	Notation	Langage ensembliste
issue ou résultat	$\omega\ (\in \Omega)$	élément de Ω
évènement A	$A \subseteq \Omega$	partie de Ω
A est réalisé	$\omega \in A$	appartenance
évènement contraire (non A)	$\overline{A} = \Omega \backslash A$	complémentaire
A et B	$A \cap B$	intersection
A ou B	$A \cup B$	union
évènements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$	disjoints
A implique B	$A \subseteq B$	inclusion
évènement impossible	$\emptyset$	ensemble vide
évènement certain	Ω	partie maximale
système complet $A_1, \ldots, A_n$	$\Omega = \sqcup A_i$	partition

1.2 Espace probabilisé

Un espace probabilisé ou espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

- Ω: L'univers (L'ensemble de tous les résultats possibles)
- $\mathcal{F}$: Un espace d'évènements: $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$
- Une application de probabilité $P: \mathcal{A} \to [0,1]$, tel que $P(\Omega) = 1$.

1.3 Variable aléatoire réelle

Définition 3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire réelle X est une fonction définie sur un univers Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$: X: $\Omega \to \mathbb{R}$.

Ainsi, une variable aléatoire X associe une valeur numérique $X(\boldsymbol{\omega})$ à chaque résultat possible $\boldsymbol{\omega}$ de l'expérience.
Le caractère aléatoire vient du fait que nous avons une expérience aléatoire (avec des probabilités décrites par la fonction de probabilité $\mathbb{P}$).

L'ensemble des valeurs qu'une variable aléatoire X peut prendre s'appelle le support et on le note S_X.

Exemple : Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 20 DA
- Si le résultat est 1, on gagne 30 DA
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 40 DA

On a défini ainsi **une variable aléatoire *X*** sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qui peut prendre les valeurs 20, 30 ou -40 ($S_X = \{20, 30, 40\}$):

$X(1) = 30$

$X(2) = 20$

$X(3) = -40$

$X(4) = 20$

$X(5) = -40$

$X(6) = 20$

$\omega\epsilon\Omega$	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	30	20	-40	20	-40	20

1.4 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ définie sur un univers $\boldsymbol{\Omega}$ et prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
La loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$ associe à toute valeur x_i de $\boldsymbol{X}$ la probabilité $P(X = x_i)$.
Exemple : Le lancer d'un dé : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- Chaque issue du lancer de dé est équiprobable et égale à $\frac{1}{6}$: $\forall \boldsymbol{\omega\epsilon\Omega},\ \boldsymbol{P(\omega)} = \frac{1}{6}$
- On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.
- $\boldsymbol{P(X = 20)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
- $\boldsymbol{P(X = 30)} = \frac{1}{6}$
- $\boldsymbol{P(X = -40)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
- Tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire *X:*

$\boldsymbol{x_i}$	-40	20	30
$P(X = x_i)$	$\mathbf{1}/3$	$\mathbf{1}/2$	$\mathbf{1/6}$

1.5 Espérance, variance, écart-type (expected value, variance and standard deviation)

Soit une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ définie sur un univers $\boldsymbol{\Omega}$ et prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
La loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$ associe à toute valeur x_i de $\boldsymbol{X}$ la probabilité $P(X = x_i) = p_i$.

- L'espérance mathématique *(expected value*) de la loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$ est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

- La variance (*variance*) de la loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$ est :

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \big(x_i - E(X)\big)^2 = p_1\big(x_1 - E(X)\big)^2 + p_2\big(x_2 - E(X)\big)^2 + \dots + p_n\big(x_n - E(X)\big)^2$$

- L'écart-type (*standard deviation*) de la loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$ est :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Exemple :

$\boldsymbol{x_i}$	-40	20	30
$P(X = x_i)$	$\mathbf{1}/3$	$\mathbf{1}/2$	$\mathbf{1/6}$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \frac{1}{3} \times (-40) + \frac{1}{2} \times (20) + \frac{1}{6} \times (30) = \frac{10}{6}$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\big(x_i - E(x)\big)^2 = \frac{1}{3} \times \left(-40 - \frac{10}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(20 - \frac{10}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(30 - \frac{10}{6}\right)^2 \approx 880{,}55$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{880{,}55} = 29{,}7$$

1.6 Fonction de répartition, fonction de masse, fonction de densité

1.6.1 Fonction de répartition (Cumulative distribution function : CDF)

Soit une variable aléatoire $X: \Omega \to \mathbb{R}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on appelle fonction de répartition de X la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$F_X(x) = P(]-\infty, x]) = P(X \leq x).$

La fonction de répartition d'une v.a. X satisfait les propriétés suivantes :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1.$
- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
- F_X est une fonction croissante: Pour toute paire de valeurs $x_1 < x_2, on\ a\ F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

Il existe deux principaux types de variables aléatoires utilisées en pratique : les variables aléatoires **discrètes** et les variables aléatoires **continues**.

Une variable aléatoire X est dite **discrète** si elle ne prend que des **valeurs de type entier** dans une liste finie $x_1, x_2, \dots, x_n$ ou une liste infinie $x_1, x_2, \dots$

Une variable aléatoire X **continue** peut prendre n'importe quelle valeur réelle dans un intervalle.

1.6.2 Fonction de masse et (Probability mass function : PMF)

La fonction de masse de probabilité (PMF) d'une **v.a. discrète** X est la fonction $p_X: \mathbb{R} \to [0,1]$ définit par $p_X(x) = P(X = x)$.

1.6.3 Fonction de densité de probabilité (Probability density functions : PDF)

Pour un v.a. continu X avec une fonction de répartition F, la fonction de densité de probabilité (PDF) de X est la dérivée f de F, donnée par $f(x) = F'(x)$.

La fonction de répartition de X est donc :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Définition : Mode

En probabilités et statistiques, le mode d'une distribution est la valeur qui a la plus grande probabilité d'occurrence dans le cas de données discrètes, ou la valeur pour laquelle la fonction de densité de probabilité atteint son maximum dans le cas de données continues.

- Soit X une variable aléatoire discrete prenant les valeurs x_1, $x_2\dots$, x_k avec les probabilités correspondante $P(X=x_1), P(X=x_2), \dots, P(X=x_n)$. Le mode M est la ou les valeurs pour lesquelles la probabilité est maximale:

$$M = \{x_i, \left| P(X=x_i) \geq \ P\left(X=x_j\right) pour\ tout\ j=1,2,\dots,k \right\}$$

- Soit X une variable aléatoire continue avec la fonction de densité de probabilité $f(x)$. Le mode M est la ou les valeurs pour lesquelles la fonction de densité de probabilité atteint son maximum:

$$M = \{x |\ f(x) \geq \ f(y)\ pour\ tout\ y\ dans\ le\ support\ de\ X\}$$

2 Quelques lois de probabilités discrètes

2.1 Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, si elle ne prend que deux valeurs : 1 pour « succès », 0 pour « échec », avec : $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p=q$, où $p \in [0,1]$.

Notation	$X \sim Bern(p)$.
Parametres	$p \in [0,1]$. $q = 1-p$
Support	$S_X = \{0,1\}$
Fonction de masse (PMF)	$P(k) = \begin{cases} p & si\ k=1 \\ 1-p & si\ k=0 \\ 0 & autrement \end{cases}$
Fonction de répartition (CDF)	$F(k) = P(X \leq k) = \begin{cases} 0 & si\ k<0 \\ q & si\ 0 \leq k < 1 \\ 1 & si\ \ k>1 \end{cases}$
Espérance	$E(X) = p$
Variance	$\mathrm{Var}(X) = pq$

Tableau 1 Loi Bernoulli

2.2 Loi de binomiale

Soient n expériences indépendants de Bernoulli, chacune avec la même probabilité de succès p. La variable X qui représente le nombre de succès obtenus est appelée variable aléatoire binomiale de paramètres n et p. On écrit $X \sim Bin(n,p)$.

Notation	$X \sim Bin(n,p)$.
Parametres	$n \in \mathbb{N}$ $p \in [0,1]$
Support	$k \in S_X = \{0,\dots,\mathrm{n}\}$
Fonction de masse (PMF)	$P(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$
Fonction de répartition (CDF)	$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=1}^{\lfloor k \rfloor} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} p^i q^{n-i}$ $\lfloor k \rfloor$ est la partie entiere de k
Espérance	$E(X) = np$
Variance	$\mathrm{Var}(X) = npq$

Tableau 2. Loi de binomiale

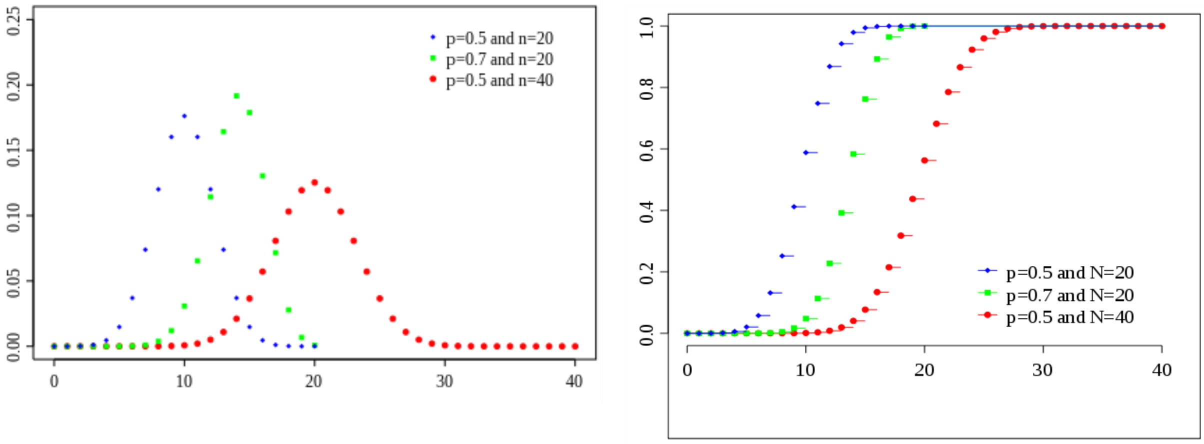

Figure 1. Fonction de masse (à gauche) et fonction de répartition (b) de la loi binomiale

2.3 Loi de géométrique

Soit une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes avec la même probabilité de succès $p \in [0,1]$. La variable aléatoire X qui donne le nombre d' épreuves nécessaires pour obtenir un premier succès est appelée variable aléatoire géométrique.

Notation	$X \sim Geom\,(p)$
Parametres	$p \in [0,1]$
Support	$k \in S_X = \{1,2,3,\dots\}$
Fonction de masse (PMF)	$P(k) = (1-p)^{k-1}p$
Fonction de répartition (CDF)	$F(k) = P(X \leq k) = 1-(1-p)^k$
Espérance	$E(X) = \frac{1}{p}$
Variance	$\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Tableau 3. Loi géométrique

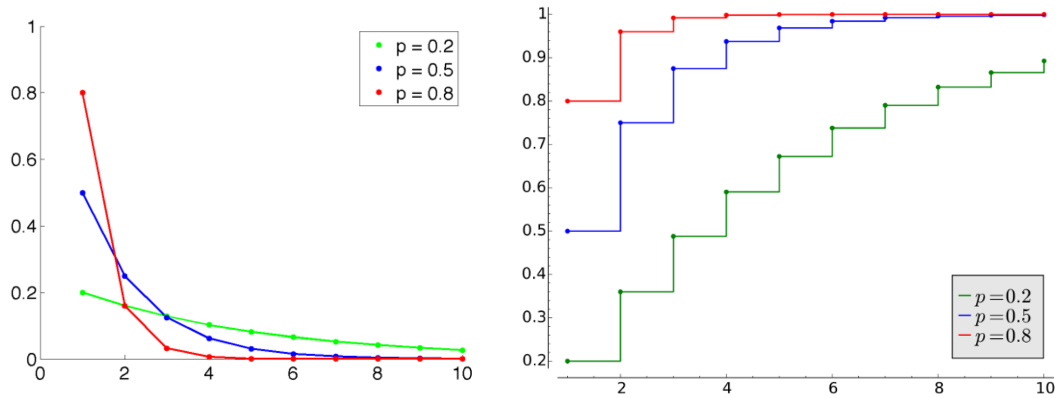

Figure 2. Fonction de masse (à gauche) et fonction de répartition (à droite) de la loi géométrique

2.4 Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit la loi de Poisson de parametre $\lambda > 0$ si l'ensemble des valeurs possibles est $S_X = \mathbb{N}$, et $\forall k \in \mathbb{N}, P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{x!}$

Notation	$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$
Parametres	$\lambda \in]0, +\infty[$
Support	$k \in S_X = \mathbb{N} = \{0,1,2,3, \ldots\}$
Fonction de masse (PMF)	$f(k) = P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{x!}$
Espérance	$E(X) = \lambda$
Variance	$\mathrm{Var}(X) = \lambda$

Tableau 4. Loi de Poisson

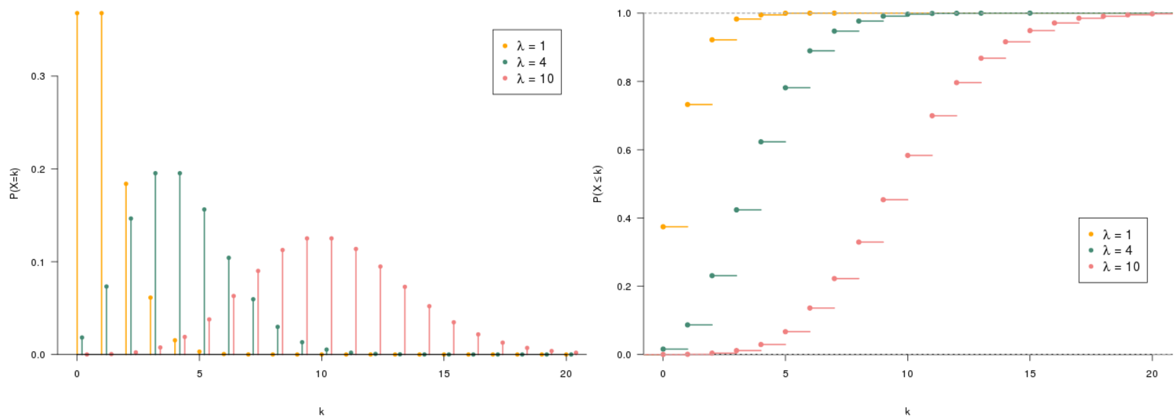

Figure 3. Fonction de masse (à gauche) et fonction de répartition (à droite) de la loi de Poisson

La loi de Poisson exprime la probabilité qu'un nombre donné d' événements se produisent dans un intervalle de temps ou d' espace fixe si ces événements se produisent avec un taux moyen λ constant et indépendamment du temps écoulé depuis la dernier événement.

Exemple : Dans une banque les clients arrivent à une fréquence moyenne **de 10 par heure**. Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de **2 clients** en **10 min** ?

Solution : Si on suppose que les clients arrivent indépendamment les uns des autres et que la moyenne est constante, la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ qui donne le nombre de clients en **10** min suit une loi $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\lambda})$, où $\boldsymbol{\lambda}$ est le nombre moyen de clients qui arrivent en **10 min**. $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{\lambda})$

$$\boldsymbol{\lambda = 10 * \frac{10}{60} = \frac{10}{6}}$$

$$\boldsymbol{P\ (X > 2) = 1 - P\ (X \leq 2) = 1 - \big(P\ (X = 0) + P\ (X = 1) + P\ (X = 2)\big)}$$

$$\boldsymbol{= 1 - \big(f\ (0) + f\ (1) + f\ (2)\big)}$$

$$\boldsymbol{= 1 - \left(\frac{e^{-10/6}(10/6)^0}{0!} + \frac{e^{-10/6}(10/6)^1}{1!} + \frac{e^{-10/6}(10/6)^2}{2!}\right)}$$

3 Quelques lois de probabilités continues

3.1 Loi uniforme

On dit qu'une variable aléatoire continue U suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ s'il uniformément distribuée sur l'intervalle $[a,b]$.

La fonction de densité est donnée par: $f(x) = \frac{1}{b-a}$

Notation	$U \sim Unif(a,b)$
Parametres	$-\infty < a < b < +\infty$
Support	$x \in [a,b]$
Fonction de densité (PDF)	$f(k) = \frac{1}{b-a}$
Fonction de répartition (CDF)	$F(k) = P(X \leq k) = \frac{k-a}{b-a} \qquad a \leq k \leq b$
Espérance	$E(X) = \frac{b-a}{2}$
Variance	$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Mode	Toutes les valeurs dans $[a,b]$

Tableau 5. Loi uniforme

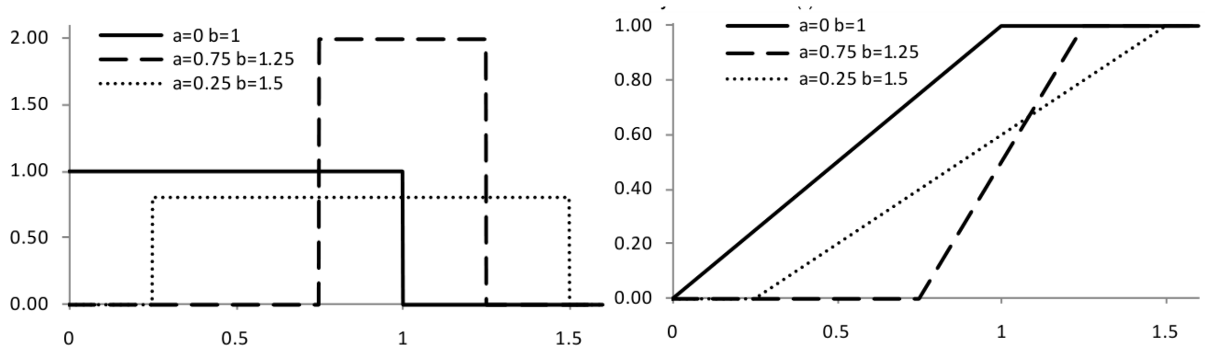

Figure 4. Fonction de densité (à gauche) et fonction de répartition (à droite) de la loi uniforme

Exemple : Soit U une variable aléatoire continue qui suit une la uniforme sur l'intervalle [0,1]

$U \sim U\ (0,1)$

La fonction de densité de U est donnée par: $f(x) = 1$

La fonction de répartition de U : $F(x) = P(U \leq x) = x$

L'esperance : $E(X) = 1/2$

La variance: $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12}$

3.2 Loi Normale

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi normale ou une **distribution gaussienne** d'espérance μ et de variance σ^2 si X admet comme fonction de densité définit par:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},-\infty<x<+\infty$$

Notation	$X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
Parametres	μ,σ^2
Support	$x\in\mathbb{R}$
Fonction de densité (PDF)	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
Fonction de répartition (CDF)	$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt$
Espérance	$E(X)=\mu$
Variance	$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$
Mode	μ

Tableau 6. Loi normale

Le cas le plus simple d'une distribution normale est connu sous le nom **de distribution normale standard, notée** $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Il s'agit d'une distribution moyenne $\mu=0$ et d'écart-type $\sigma=1$. La fonction de densité de la loi normale standard est :

$$f(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

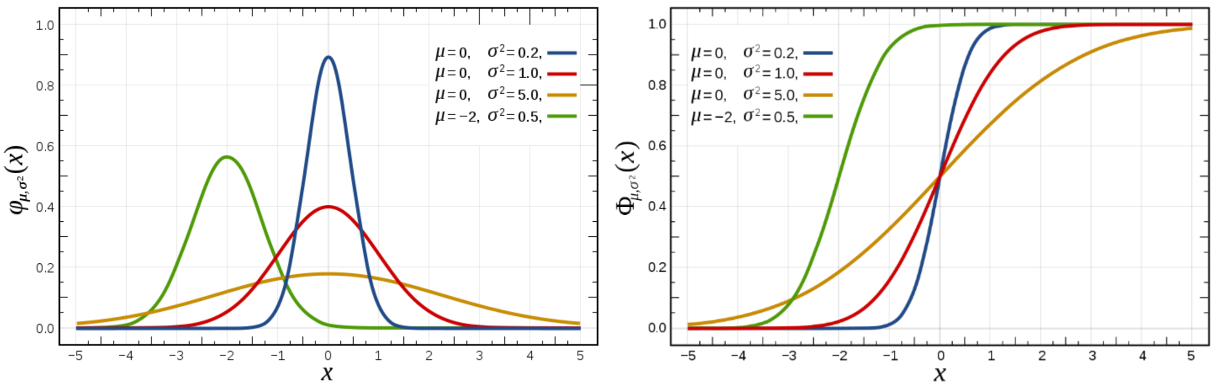

Figure 5. Fonction de densité (à gauche)et fonction de répartition (à droite)de la loi normale

3.3 Loi Log-normale

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi log-normale de parametres μ et σ^2 si la variable $Y=\ln(X)$ suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},-\infty<x<+\infty$$

Notation	$X \sim Log - \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Parametres	μ, σ^2
Support	$x \in \mathbb{R}$
Fonction de densité (PDF)	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$
Fonction de répartition (CDF)	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(\ln(t)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} dt$
Espérance	$E(X) = e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)}$
Variance	$\mathrm{Var}(X) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right)e^{2\mu+\sigma^2}$
Mode	$e^{\mu-\sigma^2}$

Tableau 7. Loi log-normale

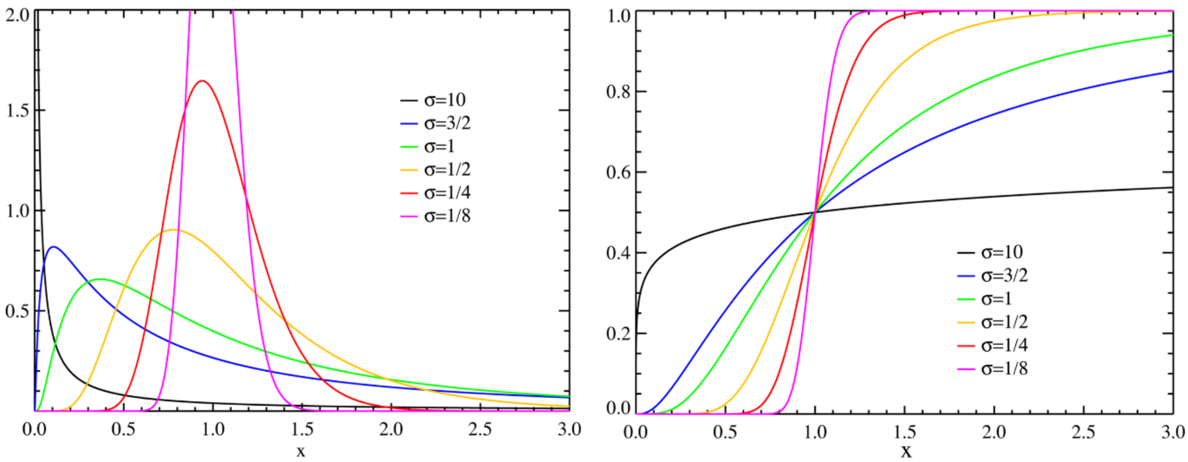

Figure 6. Fonction de densité (à gauche) et fonction de répartition (à droite) de la loi Log-normale

3.4 Loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de parametres λ si X admet comme fonction de densité de probabilité donnée par:

$$\boldsymbol{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}}:$$

Notation	$X \sim Exp(\lambda)$
Parametres	$\lambda > 0$
Support	$x \in [0, \infty[$
Fonction de densité (PDF)	$\boldsymbol{(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$
Fonction de répartition (CDF)	$F(x) = P(X \leq x) = \boldsymbol{1 - e^{-\lambda x}}$
Espérance	$E(X) = \boldsymbol{\frac{1}{\lambda}}$
Variance	$\mathrm{Var}(X) = \boldsymbol{\frac{1}{\lambda^2}}$
Mode	0

Tableau 8. Loi exponentielle

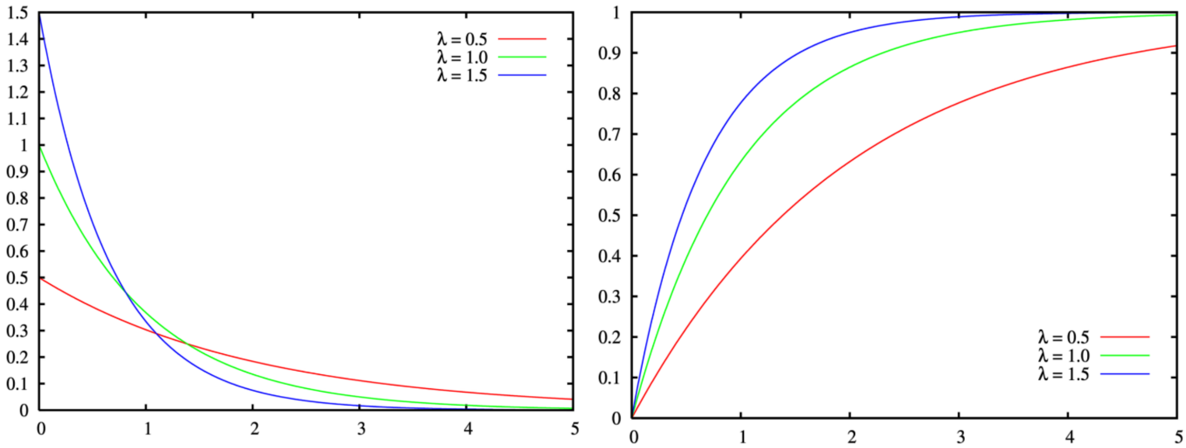

Figure 7. Fonction de densité (à gauche) et fonction de répartition (à droite) de la loi exponentielle

Remarques :

- La loi exponentielle donne le temps d'attente avant un événement lorsque le processus est régi par une loi de Poisson, c.à.d, un processus dans lequel les événements se produisent de manière continue et indépendante à un taux moyen constant.
- Dans le cas de la loi de Poisson la variable aléatoire est le nombre d'événements tandis que dans la loi exponentielle c'est le temps temps entre les événements.
- La loi exponentielle est souvent utilisée pour modéliser des événements qui ont un taux moyen constant et sans mémoire. Voici quelques-unes des applications courantes de la loi exponentielle :

– Analyse de fiabilité : la loi exponentielle est utilisée pour modéliser la durée de vie d'un composant électronique, d'un équipement ou d'un système, ce qui permet de prendre des décisions concernant la maintenance, la garantie, etc.

– Temps d'interarrivée : Dans les files d'attente, la loi exponentielle est utilisée pour modéliser les temps d'interarrivée d'événements dans divers domaines tels que : les centres d'appels, les réseaux de télécommunications, le traffic aérien, etc.

– Temps de service : Dans les files d'attente, la loi exponentielle est utilisée aussi pour modéliser les temps de service des clients.

Exemple 1: Dans une banque les clients arrivent à une fréquence moyenne **de 10 par heure**. Quelle est la probabilité qu'un client arrive dans 5 **minutes** ?

Solution:

Soit X la variable aléatoire qui donne la durée avant l'arrivée d'un client

X suit une loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda = \frac{10}{60} = 1/6}$

$$\boldsymbol{P(X \leq 5) = 1 - e^{-5\times\frac{1}{6}} \approx 0,5}$$

Exemple 2: Une montre digitale a une durée de vie moyenne de 100000 heures. Quelle est la probabilité qu'elle ne fonctionne plus après 5 ans ?

Solution :

Soit X la variable aléatoire qui donne la durée de vie en années d'une montre digitale.

$$E(X) = 100000/365{,}25/24 = 11.408 \; ans$$

X suit une loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{11.408}$

$$\boldsymbol{P(X \leq 5) = 1 - e^{-5 \times \frac{1}{11.408}} \approx 0,355}$$

3.5 Loi Erlang

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi Erlang de parametres k et θ si X admet comme fonction de densité de probabilité donnée par:

$$f(x) = \frac{\lambda^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k-1}} \boldsymbol{e}^{-\lambda x}}{(k-1)!}$$

Notation	$Erlang\ (k, \lambda)$
Parametres	$k \in \{1,2,3, \dots\}$ $\lambda > 0$ alternatif : $\theta = \frac{1}{\lambda}$
Support	$x \in [0, \infty[$
Fonction de densité (PDF)	$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$
Fonction de répartition (CDF)	$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{k-1} \lambda x^n / n!$
Espérance	$E(X) = \frac{k}{\lambda}$
Variance	$Var(X) = \frac{k}{\lambda^2}$
Mode	$\frac{k-1}{\lambda}$

Tableau 9. Loi Erlang

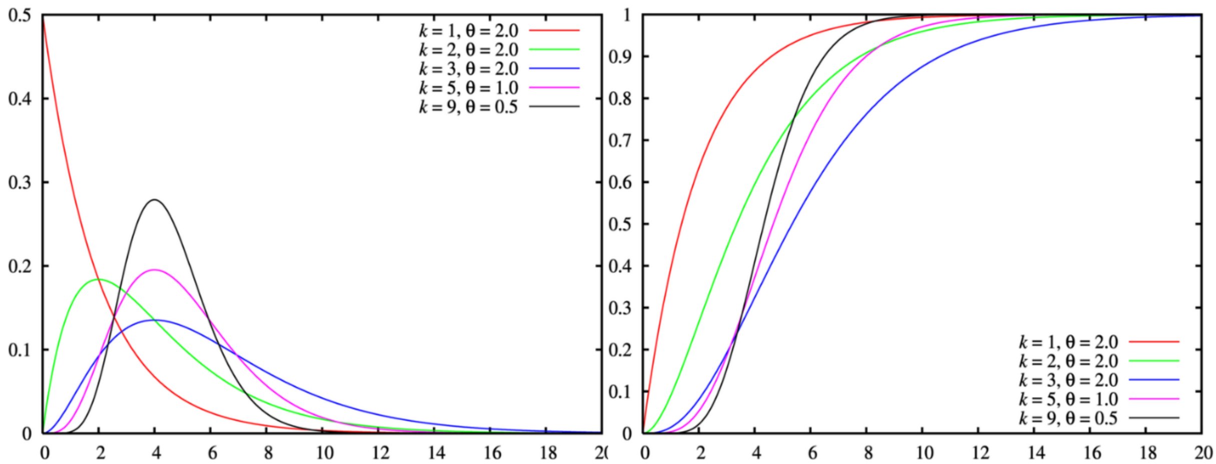

Figure 8. Fonction de densité (à gauche) et fonction de répartition (à gauche) droite de la loi Erlang

Remarques :

- Une variable aléatoire $X \sim Erlang\ (k, \lambda)$ est définie comme la somme de k variables aléatoires exponentielles indépendantes et identiquement distribuées (IID) $X = \sum_{i=1}^{k} Y_i \sim Exp\ (\lambda)$.
- Si $k = 1$, X devient une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ.
- La loi d'Erlang est plus flexible que la loi exponentielle en termes de distribution de probabilités.
- La loi $Erlang$ est largement utilisée pour la modélisation des processus d'arrivée et de service dans les files d'attente.

3.6 Loi Beta

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi Beta de parametres α et β si X admet comme fonction de densité de probabilité donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{x^{\alpha-1}}(1-x)^{\boldsymbol{\beta-1}}}{\int_0^1 \boldsymbol{u^{\alpha-1}}(1-u)^{\boldsymbol{\beta-1}}\boldsymbol{du}} & si\ x \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Notation	$X \sim Beta\ (\alpha\ ,\beta)$
Parametres	$\alpha > 0$ $\beta > 0$
Support	$x \in [0,1]$
Fonction de densité (PDF)	$f(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du}$
Espérance	$E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$
Variance	$Var(X) = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
Mode	$\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$, pour $\alpha, \beta > 1$

Tableau 10. Loi Beta

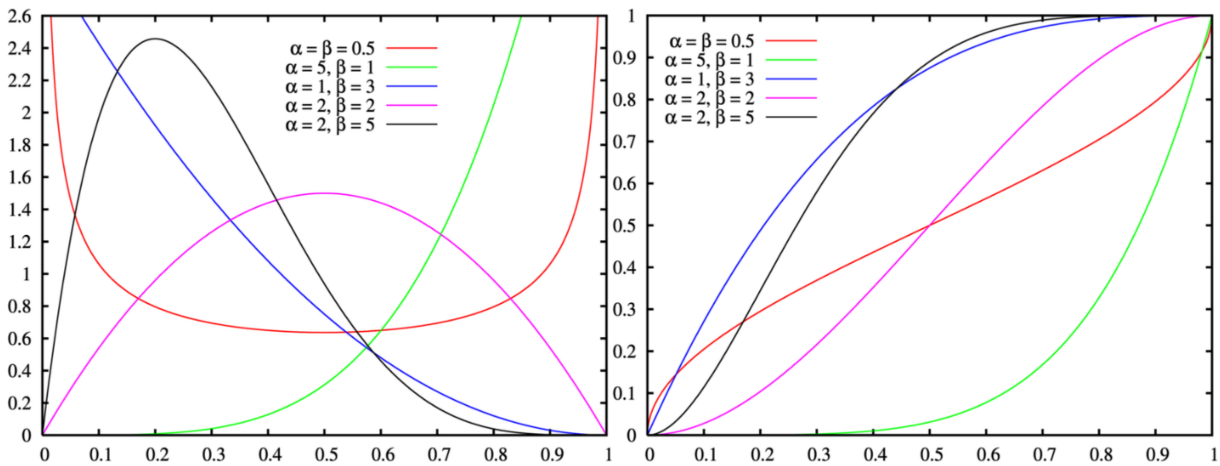

Figure 9. Fonction de densité (à gauche) et fonction de répartition (à droite) de la loi Beta

Remarques

- Un distribution bêta standard $X \sim Beta\ (\alpha\ ,\beta)$ est défini sur l'intervalle [0, 1]. Une variable aléatoire beta défini sur une plage générale $[a, b]$: $Y \sim Beta\ (\alpha\ ,\beta, a, b)$ peut être obtenue à partir de X comme suit :

$$Y = a + (b - a)X$$

- En fonction des valeurs de α et β, la distribution bêta peut présenter différentes formes :

– Si $\alpha = \beta = 1$, alors la loi bêta se réduit à une distribution uniforme sur l'intervalle [0,1].
– Si $\alpha > 1$ et $\beta > 1$, la distribution est en cloche, avec une densité maximale au centre de l'intervalle. Si $\alpha = \beta > 1$, la distribution sera symétrique.
– Si $\alpha < 1$ et $\beta < 1$, la distribution est en forme de U avec une densité maximale près des extrémités de l'intervalle 0 et 1. Si $\alpha = \beta < 1$, la distribution sera symétrique.
– Si $\alpha < 1$ et $\beta \geq 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$, la distribution est strictement décroissante, avec une densité maximale près de 0.
– Si $\alpha > 1$ et $\beta \leq 1$, ou $\alpha = 1$ et $\beta < 1$ la distribution est strictement croissante, avec une densité maximale près de 1.

3.7 Loi triangulaire

Une distribution **triangulaire** $Triangular(a, b, c)$ est définie par la limite inférieure a, la limite supérieure b et le mode (c). où $a < b$ et $a \leq c \leq b$. Sa fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} \; pour \; a \leq x \leq c \\ \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} \; pour \;\; c < x \leq b \end{cases}$$

Notation	$X \sim Triangular(a, b, c)$
Parametres	$a \in [-\infty, +\infty]$ $b: b > a$ $c: a \leq c \leq b$
Support	$x \in [-\infty, +\infty]$
Fonction de densité (PDF)	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} \; pour \; a \leq x \leq c \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} \; pour \;\; c < x \leq b \end{cases}$
Fonction de répartition (CDF)	$F(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} \; pour \; a \leq x \leq c \\ 1 - \dfrac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} \; pour \;\; c < x \leq b \end{cases}$
Espérance	$E(X) = \dfrac{a+b+c}{3}$
Variance	$Var(X) = \dfrac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}$
Mode	c

Tableau 11. Loi triangulaire

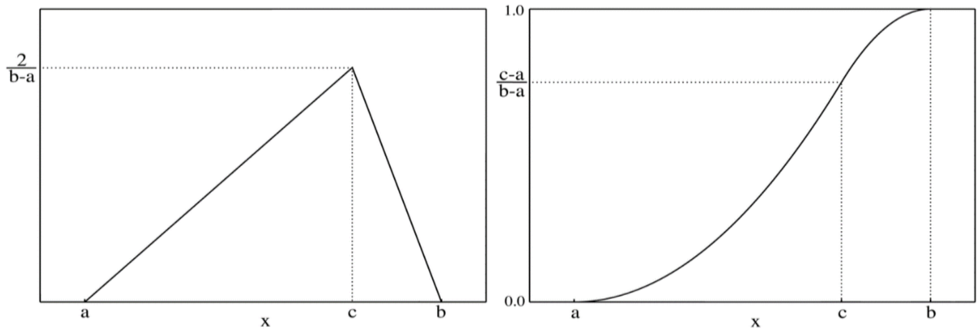

Figure 10. Fonction de densité (à gauche) et fonction de répartition (à droite) de la loi Triangulaire

3.8 Loi de Weibull

La distribution de Weibull $Weibull\ (\alpha, \beta)$ est définie par le paramètre de forme α et le paramètre d'échelle β Pour $x > 0$, la fonction de densité $f\ (x)$ est donnée par :

$$f(x) = \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

Notation	$X \sim Weibull\ (\alpha, \beta)$
Parametres	$\alpha > 0$ (scale parameter $\beta > 0$ (shape parameter)
Support	$x \in [0, +\infty[$
Fonction de masse (PDF)	$f(x) = \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}$
Fonction de répartition (CDF)	$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}$

Tableau 12. Loi Weibull

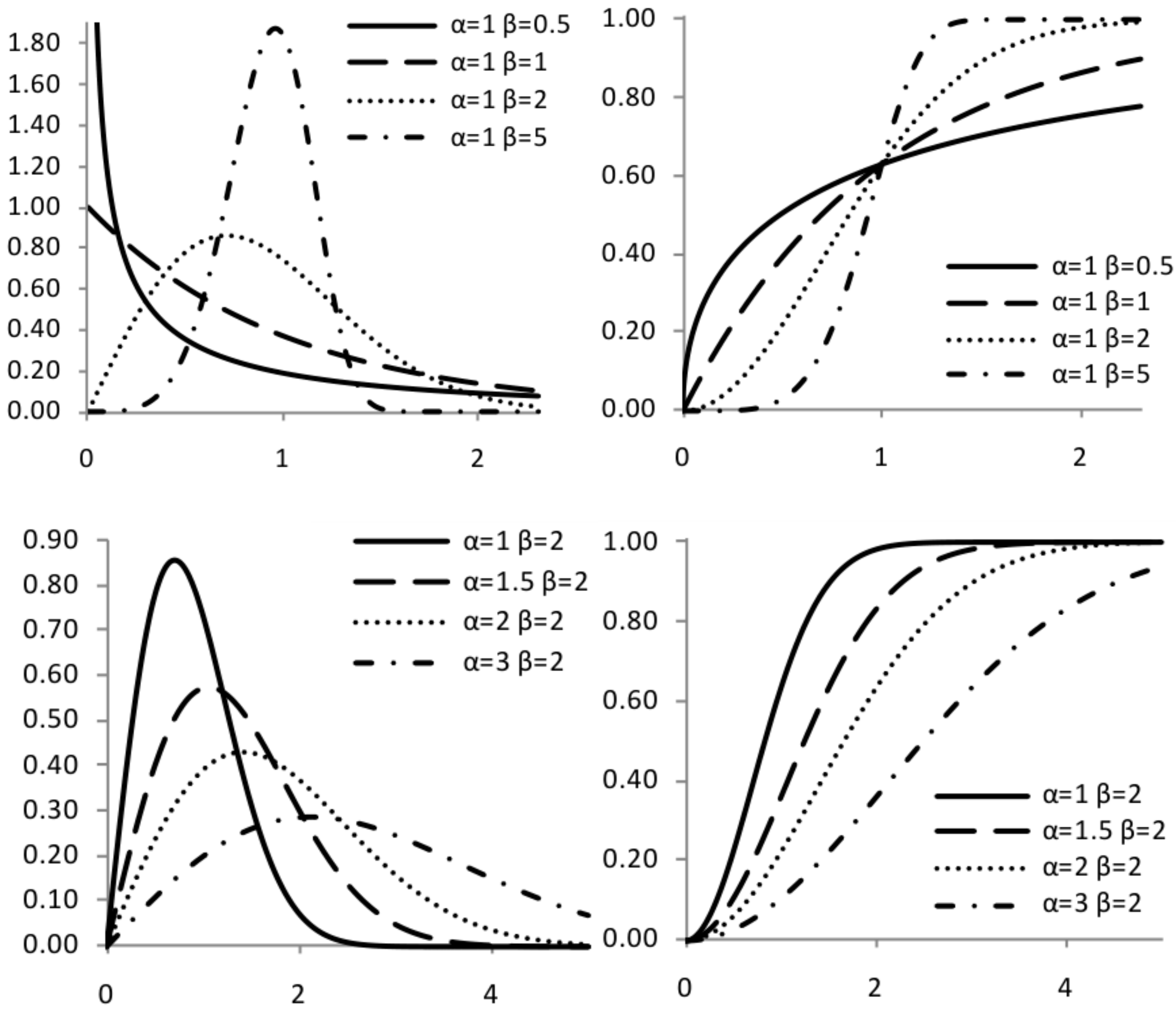

Figure 11. Fonction de densité (à gauche) et fonction de répartition (à droite) de la loi Weibull

Remarque :

La distribution Weibull est largement utilisée pour modéliser le temps de défaillance de composants et de systèmes, et pour l'analyse des données de survie en médecine et sciences de la vie, et ceci, en raison de sa flexibilité, grace au parametre paramètre β (shape parameter) qui permet de contrôler la forme de la courbe de la fonction de densité :

- Lorsque $\beta > 1$, le taux de défaillance augmente avec le temps (phase d'usure),
- $\beta = 1$ correspond à un taux de défaillance constant (distribution exponentielle),
- Lorsque $0 < \beta < 1$, le taux de défaillance diminue avec le temps (défaillances en début de vie).

4 Applications des lois de probabilités

Distributions	Applications possibles
Exponentielle $(\boldsymbol{\theta})$	– Modélisation des temps inter-arrivées des « clients » qui se produisent à un taux constant ; – Modélisation des temps inter-défaillances d'un équipement (interfailure times).
Erlang $(\mathbf{k}, \boldsymbol{\theta})$	– Modélisation des temps inter-arrivées des « clients » ;
Weibull$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$	– Modélisation des temps inter-arrivées des « clients » qui se produisent à un taux qui augmente ou diminue dans le temps ; – Modélisation des temps inter-défaillances d'un équipement (interfailure times). • Lorsque $\beta > 1$, le taux augmente avec le temps (phase d'usure), • $\beta = 1$ correspond à un taux constant (distribution exponentielle), • Lorsque $0 < \beta < 1$, le taux de diminue avec le temps.
Uniforme$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	– Utilisée comme « premier » modèle pour une quantité qui semble varier de manière aléatoire entre a et b mais sur laquelle on a peu de données. – Modélisation des temps de services lorsque seule la plage [a, b] des durées de service est fournie.
Triangulaire $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$	– Modélisation des temps de services si le mode c est également donné en plus de la plage [a, b].
Bêta $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$	– Modélisation des temps de services avec une plage finie. La distribution bêta standard $Y \sim Beta(\alpha, \beta)$ a une plage unitaire [0, 1]. Alors la variable aléatoire bêta X avec une plage générale $[a, b]$ peut être obtenue à partir de Y comme suit : $X = a + Y(b - a)$
Normale $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})$	– Si la distribution des temps de services est symétrique vers la droite (asymétrie nul), ils sont générés à partir de la distribution log-normale.
Lognormal $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})$	– Modélisation des temps nécessaires pour effectuer une tâche, comme les durées de services de clients: la densité prend des formes similaires à $Erlang(k, \theta)$ et $Weibull(\alpha, \beta)$ pour $\alpha > 1$, mais peut avoir un « pic » proche de $x = 0$, ce qui est souvent utile pour capturer des situations dans lesquelles il existe une probabilité significative de tâches de très courte durée. – Utilisé comme modèle approximatif en l'absence de données.

Tableau 13. Lois de probabilités et leurs applications possibles

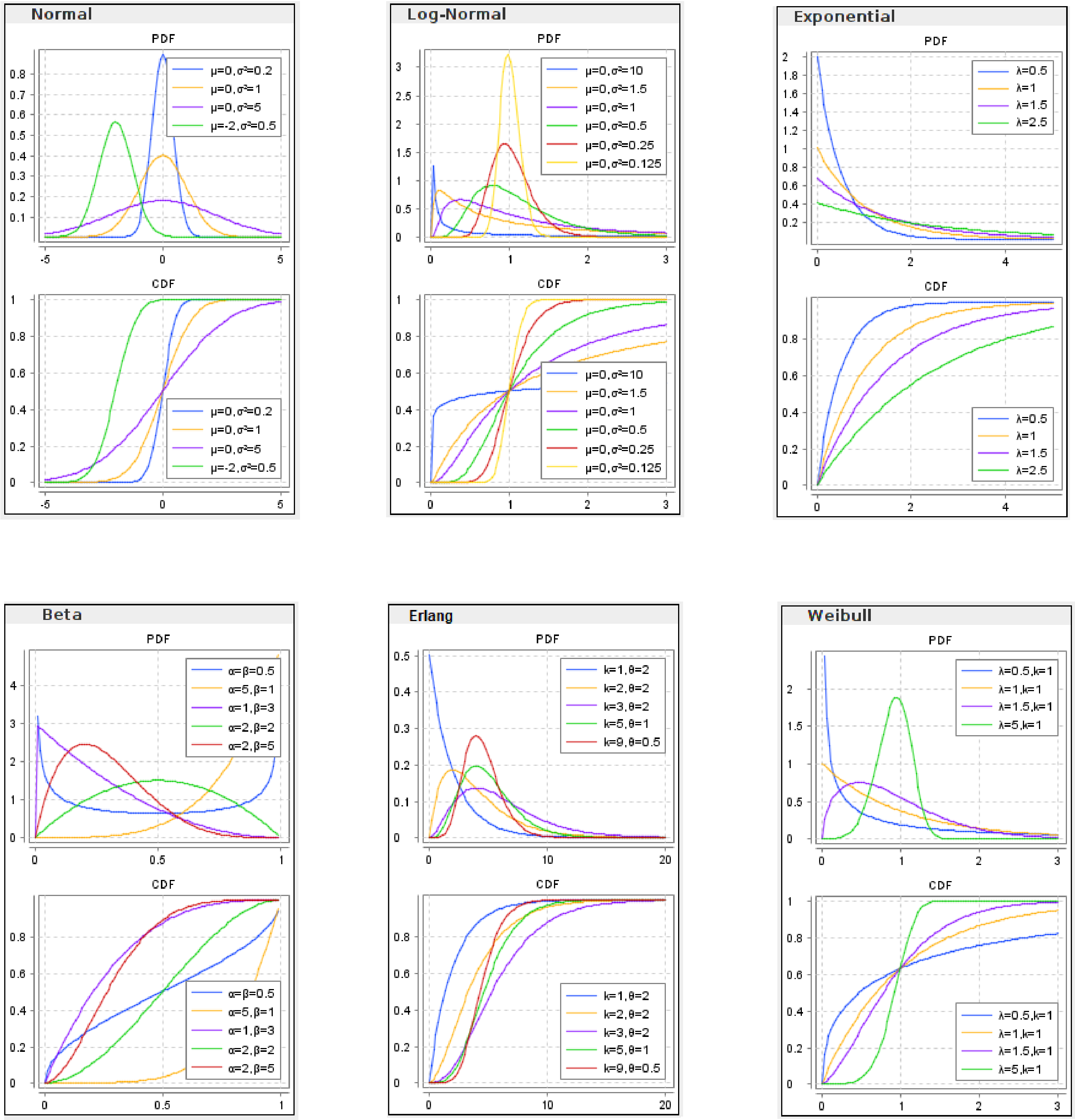

Figure 12. Fonctions de densités (PDF) et fonctions de répartition (CDF) des lois de probabilités continues