1) On a l'ensemble S est compacte et f est continue
Alors le pbm admet des solutions.

2) Qualification :

$$\nabla g = (2x, 2y, 2z)^T \neq 0$$

Car le point $(0,0,0)$ n'appartient pas à l'ensbl S.
Alors la contrainte est qualifiée.

3) On peut appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange

$$\nabla f(x,y,z) + \lambda \nabla g(x,y,z) = 0.$$

On a le système :

$$\begin{cases} 2(x-3) + \lambda 2x = 0 \\ 2(y-1) + \lambda 2y = 0 \\ 2(z+1) + \lambda 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+\lambda)x = 3 \\ (1+\lambda)y = 1 \\ (1+\lambda)z = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} (1+\lambda)^2(x^2+y^2+z^2) = 11 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (1+\lambda)^2 = \frac{11}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{11}}{2} \mp 1.$

Donc : $x = \frac{6}{\sqrt{11}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{11}}$, $z = \frac{-1}{\sqrt{11}}$

$x = \frac{6}{\sqrt{11}} + 2$ $y = \frac{1}{\sqrt{11}} + 2$, $z = \frac{-1}{\sqrt{11}} + 2$

Donc le point le plus proche de A est $\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ car la valeur de f est $(-\sqrt{11} + 2)$.