

Exercice 01:

$$f(x,y) = 3x - y \quad \text{s.c.} \quad g: x^2 + y^2 = 5.$$

1) La qualification: la contrainte est qualifiée si elle est active pour tous points où le gradient est libre.

Alors;

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{Car le point } (0,0) \text{ n'active pas } g.$$

Donc;

la contrainte g est qualifiée.

2) Le système: soit l'équation du lagrange.

$$L(x,y,\lambda) = 3x - y + \lambda (x^2 + y^2 - 5)$$

le système Δ ;

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 3 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow \\ -1 + 2\lambda y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 9 = 4\lambda^2 x^2 \\ 1 = 4\lambda^2 y^2 \end{cases}$$

$$\text{cela donne : } 20\lambda^2 = 10 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{et : } (x,y) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (3, -1).$$

Exercice 02)

Soit

$$f(x,y) = e^x + e^y + axy$$

f est convexe si $\nabla^2 f(x,y) \geq 0$.

$$\text{Alors : } \nabla f = \begin{pmatrix} e^x + ay \\ e^y + ax \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} e^x & a \\ a & e^y \end{pmatrix}$$

$$\text{on a : } d_1 = e^x > 0 \quad \text{et} \quad d_2 = e^x e^y - a^2.$$

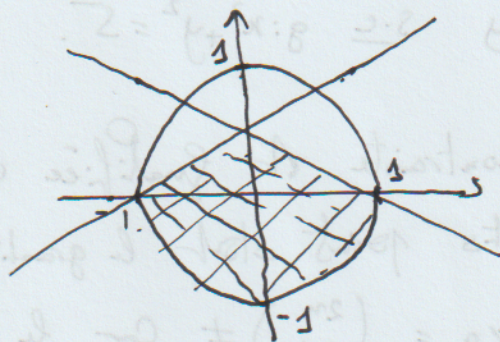
par que d_2 soit toujours > 0 si $a=0$.

puisque e^{xy} est toujours positif.

Exercice 03 : Soit $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ s.c

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 : g_1 \\ 2y - x \leq 1 : g_2 \\ 2y + x \leq 1 : g_3 \end{cases}$$

1) le dessin:



2) on a l'intersection des fermés et fermé :

$$g_1^{-1}([-1,1]), g_2^{-1}([-\infty, 1]), g_3^{-1}([-\infty, 1]).$$

L'ensemble C est borné, il est compact. Et comme f est continue, elle atteint ses bornes et admet un min global et max global.

3) g_1, g_2 et g_3 ne peuvent pas être actives simultanément si le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \quad (1) \\ 2y - x = 1 \quad (2) \\ 2y + x = 1 \quad (3) \end{cases} \text{ n'admet pas solution.}$$

De (2) et (3) $y = 1/2$ et de (3) $x = \pm \sqrt{3}/2$ cela ne vérifie pas (1) et (2). Et la condition est vérifiée.

4) Les gradients: $\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$, $\nabla g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\nabla g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5) Qualification:

a) ∇g_2 et ∇g_3 sont linéairement indépendants pour tout (x,y) .

b) le point qui active g_1 et g_2 est : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (-1,0)$
 mais : $\nabla g_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\nabla g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont L.I.

c) le point qui active g_1 et g_3 est : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2y + x = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (1,0)$
 mais : $\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\nabla g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont L.I.

* De a), b) et c) : on conclut que les contraintes sont qualifiées.