Série N: 04

Exo 1 :

* $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \cos\frac{1}{x}$$

$$= 0 \quad (\text{car } \lim_{x \to 0} x = 0 \text{ et } \cos\tfrac{1}{x} \text{ bornée})$$

Alors la fonction f est dérivable en x_0 et la fonction dérivée en $x_0 = 0$ est $f'(0) = 0$.

* $f(x) = \begin{cases} \sin x \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x} \text{ n'existe pas}$$

Alors f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

* $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 - a^2}} & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{si } |x| \geq a \end{cases} = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 - a^2}} & ; -a < x < a \\ 0 & ; x \in \left]-\infty, -a\right] \cup \left[a, +\infty\right[\end{cases}$

- dérivabilité de f en $x_0 = a$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \overset{>}{\to} a} \frac{0 - 0}{x - a} = 0 = f'_d(a)$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \overset{<}{\to} a} \frac{e^{\frac{1}{x^2 - a^2}} - 0}{x - a} = 0 = f'_g(a)$$

on a : $f'_d(a) = f'_g(a)$. Alors f dérivable en $x_0 = a$ et $f'(a) = 0$.

- dérivabilité de f en $x_0 = -a$.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -a} \frac{f(x) - f(-a)}{x + a} = \lim_{x \overset{<}{\to} -a} \frac{0 - 0}{x + a} = 0 = f'_g(-a)$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -a} \frac{f(x) - f(-a)}{x + a} = \lim_{x \overset{>}{\to} -a} \frac{e^{\frac{1}{x^2 - a^2}} - 0}{x + a} = 0 = f'_d(-a)$$

on a: $f'_d(-a) = f'_g(-a)$. donc f dérivable en $x_0 = -a$.

Exo 2:

1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Déterminer a, b pour que f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

On a: $\sqrt{x}$ dérivable sur $]0, 1[$ et $ax^2 + bx + 1$ est dérivable sur $]1, +\infty[$. Alors f est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$

* la dérivabilité de f en $x_0 = 1$: $(f(1) = 1)$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1.$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \sqrt{x} = 1 = f(1)$$

f continue en $x_0 = 1 \iff \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = f(1)$

$$\implies a + b + 1 = 1 \implies a = -b.$$

Donc f continue pour $a = -b$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{ax^2 + bx + 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{ax^2 - ax}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{ax\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = a = f'_d(1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} = f'_g(1)$$

f dérivable en $x_0 = 1 \Leftrightarrow f'_d(1) = f'_g(1)$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$ et $b = -a = -\frac{1}{2}$. ~~Donc~~

f est dérivable en $x_0 = 1$ pour $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

* Calcule $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2) $g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < e \\ a\ln x + b & \text{si } x \geq e \end{cases}$

$(x-1)$ est dérivable sur $]-\infty, e[$ et $(a\ln x + b)$ est dérivable sur $]e, +\infty[$. Donc g est dérivable sur $]-\infty, e[\cup]e, +\infty[$.

* la dérivabilité de g en $x_0 = e$:

- la continuité de g en $x_0 = e$: (On a : $g(e) = a + b$)

$$\lim_{x \to e^+} g(x) = \lim_{x \to e^+} a\ln x + b = a + b$$

$$\lim_{x \to e^-} g(x) = \lim_{x \to e^-} x - 1 = e - 1$$

f continue en $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to e^+} g(x) = \lim_{x \to e^-} g(x) = g(e)$

$\Rightarrow a + b = e - 1$

$\Rightarrow b = e - a - 1$.

- dérivabilité de g en $x_0 = e$.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{g(x)-g(e)}{x-e} = \lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{x-1-a-b}{x-e} = \lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{x-\cancel{1}-\cancel{a}-e+\cancel{a}+\cancel{1}}{x-e}$$

$$= \lim_{x \overset{<}{\to} e} \frac{x-e}{x-e} = 1 = g'_g(e)$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} e} \frac{g(x)-g(e)}{x-e} = \lim_{x \overset{>}{\to} e} \frac{a\ln x+b-a-b}{x-e} = \lim_{x \overset{>}{\to} e} \frac{a(\ln x-1)}{x-e}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} e} a \cdot \frac{\ln(x)-1}{x-e} = \frac{a}{e} = g'_d(e)$$

$\frac{1}{e}$

g dérivable en $x_0 = e \iff g'_d(e) = g'_g(e)$

$$\Rightarrow \frac{a}{e} = 1 \Rightarrow a = e.$$

et on a : $b = e - a - 1 \Rightarrow b = -1$

Donc g dérivable en $x_0 = e$ pour $a = e$ et $b = -1$

* Calcule $g'(x)$:

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq e \\ \frac{e}{x} & \text{si } x \geq e \end{cases}$$

EXO3 :

Calcule la fonction dérivée d'ordre n :

$f(x) = \sin^2 x$

$f'(x) = 2\cos x \sin x = \sin 2x$.

$f''(x) = 2\cos 2x = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2})$

$f^{(3)}(x) = 2 \times 2\cos(2x + \frac{\pi}{2}) = 2^2 \sin(2x + 2 \times \frac{\pi}{2})$

$f^{(4)}(x) = 2^2 \times 2\cos(2x + 2\frac{\pi}{2}) = 2^3 \sin(2x + 3\frac{\pi}{2})$

$$f^{(5)}(x) = 2^4 \cos\left(2x + 3\frac{\pi}{2}\right) = 2^4 \sin\left(2x + 4\frac{\pi}{2}\right)$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \sin\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

* $g(x) = \ln(1+x)$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

$$g''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$g^{(3)}(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$g^{(4)}(x) = -2\times 3\,\frac{(1+x)^2}{(1+x)^6} = -2\times 3\times\frac{1}{(1+x)^4}$$

$$g^{(5)}(x) = 2\times 3\times 4\,\frac{(1+x)^3}{(1+x)^8} = 2\times 3\times 4\times\frac{1}{(1+x)^5}$$

$\vdots$

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{(1+x)^n}$$

Exo 4:

1) $x_0 = 0$ est extremum $\Leftrightarrow f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$

$f(x) = (1-k)^2 x^2 + (1+k)x^3$; $k \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 2(1-k)^2 x + 3(1+k)x^2 \Rightarrow f'(0) = 0.$

$f''(x) = 2(1-k)^2 + 6(1+k)x$; $f''(0) = 2(1-k)^2$

0 extremum $\Leftrightarrow f''(0) \neq 0 \Rightarrow 2(1-k)^2 \neq 0 \Rightarrow k \neq 1$

Alors $k \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) $f(x) = \sin x^2$, $x \in [0, \pi]$

$f'(x) = 2x \cos x^2$

les points critiques:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x\cos x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \vee \\ \cos x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \vee \\ x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \vee \\ x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \end{cases}$

$f''(x) = 2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2$. Alors.

* pour $x = 0$:

* $f''(0) = 2\cos 0^2 - 4\,0^2 \sin 0^2 = 2\cos 0 = 2 > 0$, donc 0 est extremum (minimum).

* pour $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$

$f''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - 4\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi.k\right)$

$= -4\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \neq 0$

- Si k pair : $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 1$ donc :

$f''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right) = -4\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) < 0$ donc $\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ est extremum (maximal)

- Si k impair : $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -1$ donc :

$f''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right) = 4\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) > 0$ donc $\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ extremum (minimal). Alors les extremum de f sont $\left\{0, \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right\}$

3) $f(x) = x^4 - x^3 + 1$, $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$

les points critiques :

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(4x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \vee \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$

$f''(x) = 12x^2 - 6x$.

pour $x = \frac{3}{4}$:

$f''(\frac{3}{4}) = 12 \times \frac{9}{16} - 6 \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 9}{4} - \frac{18}{4} = \frac{27-18}{4} = \frac{9}{4} > 0$

donc $\frac{3}{4}$ est extremum (minimal)

pour $x = 0$.

$f''(0) = 0 \Rightarrow f^{(3)}(x) = 24x - 6 \Rightarrow f^{(3)}(0) = -6 \neq 0$.

Alors 0 n'est pas extremum.

<u>EXO5 :</u>

* $f(x) = \sin^2 x$ sur $[0.\pi]$

Rolle sur $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a.b] \\ f \text{ dérivable sur }]a.b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$

$f(x) = \sin^2 x$ continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $[0.\pi]$ et dérivable sur $]0.\pi[$,

$f(0) = 0$ et $f(\pi) = \sin^2 \pi = 0 \Rightarrow f(0) = f(\pi)$

Alors on peut applique le théorème de Rolle sur f.

* b et c) Même Méthode.

<u>EXO6 :</u>

1) Montre que $x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y$; $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$
$0 < x < y$.

applique théorème des accroissements finis sur la fonction $f(t) = \ln t$ dans $[x.y]$ où $0 < x < y$.

$f(t) = \ln t$ est continue sur $[x.y]$ et dérivable sur $]x.y[$

alors d'après theoreme des accroissements finis :

$\exists c \in]x, y[\; ; \; f'(c) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$, alors

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln(y) - \ln x}{y - x} \Rightarrow c = \frac{y - x}{\ln y - \ln x}.$$

et on a: $c \in]x, y[\Rightarrow x < c < y$

$$\Rightarrow x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y$$

2) ~~...~~) Montre que: $a \leq \sqrt{a^2 + x^2} \leq a + \dfrac{x^2}{a}$, $\forall a > 0$

Supposons $f(t) = \sqrt{a^2 + t^2}$ sur $[0. x]$

f continue sur $[0. x]$ et dérivable sur $]0. x[$, d'après théorème des accroissements finis:

$$\exists c \in [0. x], \; f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow f(x) - f(0) = x f'(c)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(0) = x \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \quad \left(\text{car } f'(t) = \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}}\right)$$

On a! $f(0) = \sqrt{a^2} = a$ et $c \in [0, x] \Rightarrow 0 \leq c \leq x$.

$$\Rightarrow cx \leq x^2 \text{ et } c^2 \geq 0 \Rightarrow c^2 + a^2 \geq a^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{c^2 + a^2} \geq a \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}} \leq \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{cx}{\sqrt{c^2 + a^2}} \leq \frac{cx}{a} \leq \frac{x^2}{a} \quad (\text{car } cx \leq x^2)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{cx}{\sqrt{c^2 + a^2}} \leq \frac{x^2}{a}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) - f(0) \leq \frac{x^2}{a}$$

$$\Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq \frac{x^2}{a} + f(0)$$

$$\Rightarrow a \leq \sqrt{a^2 + x^2} \leq \frac{x^2}{a} + a$$

EXO 7 :

f continue sur $[n, n+1]$ (car $\ln n$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$).
et dérivable sur $]n, n+1[$. Alors d'après théorème des accroissements finis :

$\exists c_n \in]n, n+1[\; ; \; f'(c_n) = \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{n+1-n} \Rightarrow f'(c_n) = f(n+1) - f(n)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{c_n} = \ln(n+1) - \ln(n)$.

On a : $c_n \in]n, n+1[\Rightarrow c_n > n \Rightarrow \dfrac{1}{c_n} < \dfrac{1}{n}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k}$$

On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)]$

$= (\cancel{\ln 2} - \ln 1) + (\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}) + \cdots + (\ln(n+1) - \cancel{\ln n})$

$= \ln(n+1)$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = \ln(n+1) \text{, donc.}$$

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty \text{. Alors}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty.$$

EXO 8 :

$$* \lim_{x \to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\frac{\pi}{2} x)} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x+1)e^{x^2+x} - 2e^{2x}}{-\frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2} x)}$$

$$= -\frac{2e^2}{\pi}$$

$$* \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$