Analyse 01 :

2020/2021
بوجبير د . ن

# Solution de série N:03

**Exo1 :** Détermine les domaines de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{x^3+3}{1-|x|}$

$f$ définie $\Leftrightarrow 1-|x| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in ]-\infty,-1[ \cup ]-1,1[ \cup ]1,+\infty[$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$.

$f$ définie $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+1} \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1) \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in ]-\infty,-1[ \cup [2,+\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x-2)(x+1)$ | | $+$ | $\parallel$ | $-$ | | $+$ | |

$D_f = ]-\infty,-1[ \cup [2,+\infty[$.

3) $f(x) = \ln(4x+3)$

$f$ définie $\Leftrightarrow 4x+3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{-3}{4}$ donc $D_f = ]\frac{-3}{4}, +\infty[$.

**Exo2 :** Etudie la parité :

1. $f(x) = \dfrac{tg\,x - x}{x^3 \cos x}$

$D_f = \mathbb{R}^* - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$$f(-x) = \frac{tg(-x)+x}{(-x)^3 \cos(-x)} = \frac{\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} + x}{-x^3 \cos x}$$

$$= \frac{\frac{-\sin x}{\cos x} + x}{-x^3 \cos x} = \frac{-tg\,x + x}{-x^3 \cos x} = \frac{tg\,x - x}{x^3 \cos x} = f(x)$$

alors $f$ est paire.

## Exo3 :

soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$

1 - Montrez que $f$ est majorée et minorée sur $\mathbb{R}$ :

$f$ majorée $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} ; \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M.$

$f$ minorée $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \exists m \in \mathbb{R} :\ f(x) \geq m.$

$\forall x \in \mathbb{R} : \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad$ et $\quad \frac{1}{1+x^2} > 0.$

$$-1 \leq \frac{-1}{1+x^2} \leq \frac{\cos x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1.$$

donc $f$ majorée car $\exists M = 1,\ f(x) \leq 1$
$f$ minorée car $\exists m = -1,\ f(x) \geq -1.$

2) - Détermine $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$

on a $f(x) \in [-1, 1]$, et $f(0) = 1$
donc $\max f(x) = \sup f(x) = 1.$

## Exo 4 : par définition, montrez que :

$\ast \lim_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - 3| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x+1} - 2| < \varepsilon$

on a : $|\sqrt{x+1} - 2| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \sqrt{x+1} - 2 < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{x+1-4}{\sqrt{x+1} - 2} < \varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon(\sqrt{x+1} - 2) < x - 3 < \varepsilon(\sqrt{x+1} - 2)$

$\Rightarrow |x - 3| < \underbrace{\varepsilon(\sqrt{x+1} - 2)}_{\delta}$

$\ast \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-1} = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \neq 0 : \Rightarrow |x - 1| < \delta \Rightarrow f(x) > A$

on a $\frac{x+2}{x-1} > A \Rightarrow \frac{x-1+3}{x-1} > A \Rightarrow 1 + \frac{3}{|x-1|} > A \Rightarrow |x - 1| < \underbrace{\frac{3}{A-1}}_{\delta}$

Exo 5 : Calcule les limites :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$, on a $D_f = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >\\ <}} \begin{cases} x + 2 & x > 0 \\ x - 2 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$

comme $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$ donc il n'y a pas de limite en $x = 0$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x} = -\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1$

4) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$

on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ : $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$

$-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$

$\lim\limits_{x \to 0} -x \leq \lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim\limits_{x \to 0} x$

$0 \leq \lim f(x) \leq 0$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ donc la limite existe

2ème méthode : on a $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ | $\sin \frac{1}{x}$ est bornée et $\lim x = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 0} x \times \sin \frac{1}{x} = 0$

5) - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1+e^{1/x}} = ?$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0$ , $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{1+e^{\underbrace{1/x}_{=\infty}}} = 1$

6) - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} E(x)$ , $D_f = \mathbb{R}^*$

on a $x - 1 \leq E(x) \leq x$

$\frac{x-1}{x} \leq \frac{1}{x} E(x) \leq 1 \iff \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} E(x) \leq \lim\limits_{x \to +\infty} 1$

$\iff 1 \leq \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} E(x) \leq 1$

donc $\lim \frac{1}{x} E(x) = 1$

7) - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)^2}{x^4}$ , $D_f = \mathbb{R}^*$

On a : $\cos x \underset{V(0)}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)^2}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1})^2}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{4}}{x^4} = \frac{1}{4}$

8) - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(3x+1)}{2x} = \lim \frac{3}{2} \underbrace{\frac{\ln(3x+1)}{3x}}_{\to 1} = \frac{3}{2}$

9) - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim$ $D_f = [-1, 0[ \cup ]0, 1]$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cancel{1}+x - \cancel{1}+x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1$.

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|\sin x|}$ , $D_f = \mathbb{R} - \{\pi k,\ k \in \mathbb{R}\}$.

On a : $\sin x \underset{V(0)}{\sim} x$ . donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|\sin x|} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{x}{-x} = -1 . \end{cases}$$

**Exo 6 :** Étudier la continuité

1)- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ , $x_0 = 0$ , $D_f = \mathbb{R}$.

$f$ continue en $0 \iff \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$

On a : $\sin x \underset{V(0)}{\sim} x$ /

$\lim\limits_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$ et $f(0) = 0$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, ~~donc~~ et alors $f$ n'est pas continue , et comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe donc $f$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et $g$ le prolongement et $g$ est définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

2)- $f(x) = \sin(x+1)\ln|x+1|$ , $x_0 = -1$

$\overline{0 \times +\infty}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$\lim_{x \to -1} \sin(x+1)\ln|x+1| = \lim_{x \to -1} \underbrace{\frac{\sin x+1}{x+1}}_{1} \times \underbrace{(x+1)\ln|x+1|}_{0} = 0$$

donc f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et le prolongement de f est

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -1 \\ 0 & x = -1 \end{cases}$$

3)- $f(x) = \dfrac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|}$ , $x_0 = 0$ , $D_f = \mathbb{R}^*$

on a : $0 \notin D_f \Rightarrow f$ est discontinue en $x_0 = 0$

<u>ou</u> : $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim \dfrac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|}$ :

$$\cos y \underset{V(0)}{=} 1 - \frac{y^2}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{|x|}{2}}{|x|} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{|x|}{2}}{|x|} = 1/2$$

donc f est prolongeable sur $\mathbb{R}$ et . prolongement de f est

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

4) - $f(x) = e^{-1/x^2}$ , $D_f = \mathbb{R}^*$ , $0 \notin D_f$ donc f est discontinue en 0

$\lim\limits_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0$

donc f est prolongeable sur $\mathbb{R}$ et le prolongement défini par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

**EX07**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x^2)}{x} - 1 & x < 0 \\ b & x = 0 \\ x^2 + x - a & x > 0 \end{cases}$$

1) - Détermine a.b pour f est continue sur $\mathbb{R}$.

f continue sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ f est continue au tout point dans $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ f est continue au point $x_0 = 0$.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = f(0)$

on a $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} x^2 + x - a = -a$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim \frac{2x}{2x} \times \frac{\ln(1+2x^2)}{x} - 1 = \lim 2x \times \frac{\ln(1+2x^2)}{2x^2} - 1 = -1$

$\left. \begin{array}{l} f(0) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) \\ b = -a = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \end{array}}$

2). - Montrez que l'equation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $[-1,1]$.

$f(-1) = -\ln 3 - 1 < 0$ $\Rightarrow f(1) \times f(-1) < 0$

$f(1) = 1 > 0$

donc d'après le théorème d'intermédiaire, il existe $x_0 \in [-1,1]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Exo 8 :

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x < -2 \\ a & x = -2 \\ (2x+b)^2 & x > -2 \end{cases}$$

Determine $a, b$ pour $f$ est continue sur $\mathbb{R}$

on a : $f(x) = (x-1)^2$ est continue sur $]-\infty; 2[$

et si $x \in ]-2, +\infty[$, $f(x) = (2x+b)^2$ est continue (polynome)

$f$ est continue sur $\mathbb{R}$ si $f$ est continue en $-2$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} (2x+b)^2 = (b-4)^2$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} (x-1)^2 = 9$

alors $9 = (b-4)^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ (b-4)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b-4 = 3 \ \vee \ b-4 = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ \vee \\ b = 1 \end{cases}$

donc pour que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ il faut que $a = 9$ et $b = 7$ ou $b = 1$