la Série N°02 :

Exercice 01 : Montrer par récurrence que :

1) $1+2+3+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ---- $P(n)$

* pour $n=1$:

$1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ vérifie.

* Supposons $P(n)$ vraie et montre que $P(n+1)$ est vraie

c'est-à-dire : $1+2+3+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ vraie et

on montre que $1+2+3+\dots+n+1 \overset{?}{=} \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$1+2+\dots+n+(n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2}+n+1$

$= \dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Alors $P(n+1)$ est vraie. Donc

$1+2+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) $1^2+2^2+\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

* pour $n=1$:

$1 = \dfrac{1(2)(3)}{6} \Rightarrow 1 = 1$ vérifie.

On suppose que $1^2+2^2+\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et on

montre que : $1^2+2^2+\dots+(n+1)^2 \overset{?}{=} \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

On a :

$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2+(n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$

$= \dfrac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6}$

$= \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Alors :

$1^2+2^2+\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

EXO2:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} (-1)^n + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} = \lim_{n \to +\infty} (-1)^n.$$

Si n pair :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim (-1)^n = 1$$

Si n impair :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim (-1)^n = -1$$

$\Rightarrow 1 \neq -1$ Alors la suite (U_n) divergente.

EXO3: $U_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et $U_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

Calcule U_n :

$$U_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \left(\frac{2^2 - 1}{2^2}\right)\left(\frac{3^2 - 1}{3^2}\right) \cdots \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)$$

$$= \left(\frac{(2-1)(2+1)}{2 \times 2}\right)\left(\frac{(3-1)(3+1)}{3 \times 3}\right) \cdots \left(\frac{(n-1)(n+1)}{n \times n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \cancel{\frac{3}{2}}\right)\left(\cancel{\frac{2}{3}} \times \frac{4}{\cancel{3}}\right) \cdots \left(\cancel{\frac{n-1}{n}} \times \frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

EXO4: $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $v_n = U_n + \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$* \; U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$= \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{(n+1)^2} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2^2}} - \cdots - \cancel{\frac{1}{n^2}}$$

$= \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Alors (U_n) suite croissante.

$$* \; v_{n+1} - v_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n} = U_{n+1} - U_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}.$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{n} + \cancel{n^2} + \cancel{n} - \cancel{n^2} - \cancel{2n} - 1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0.$$

Donc (v_n) suite décroissante.

$$* \lim_{n \to +\infty} U_n - v_n = \lim_{n \to +\infty} U_n - U_n - \frac{1}{n} = 0.$$

Alors (U_n) et (v_n) sont adjacentes.

EXO5 : $a > 0$, $U_0 > 0$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)$

1) Montrer que : $U_{n+1}^2 - a = \frac{(U_n^2 - a)^2}{4U_n^2}$

$$U_{n+1}^2 - a = \left(\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(\frac{U_n^2 + a}{U_n}\right)^2 - a$$

$$= \frac{1}{4U_n^2}\left(U_n^4 + 2aU_n^2 + a^2 - 4aU_n^2\right)$$

$$= \frac{1}{4U_n^2}\left(U_n^4 - 2aU_n^2 + a^2\right) = \frac{1}{4}\frac{(U_n^2 - a)^2}{U_n^2}$$

2) il est clair que pour $n \geq 0$ on a : $U_n > 0$. D'après l'égalité précédente pour $n \geq 0$ $U_{n+1}^2 - a \geq 0$ et comme $U_{n+1} > 0$. Alors $U_{n+1} \geq \sqrt{a}$.

Soit $n \geq 1$. calculons le quotient de U_{n+1} par U_n :

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{U_n^2}\right)$, or $\frac{a}{U_n^2} \leq 1$ car $U_n \geq \sqrt{a}$ donc

$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1 \iff U_{n+1} \leq U_n$. Alors la suite (U_n) est décroissante.

3) la suite (U_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$. donc elle converge vers une limite $\ell > 0$. D'après la relation $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)$

quand $n \to +\infty$ alors $U_n \to \ell$ et $U_{n+1} \to \ell$. Donc :

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right) \Rightarrow \ell = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell^2 + a}{\ell}\right) \Rightarrow \ell^2 - 2\ell^2 + a = 0$$

$$\Rightarrow \ell^2 = a \Rightarrow \ell = \sqrt{a}.$$ Alors (U_n) converge vers $\sqrt{a}$.

4) $$U_{n+1}^2 - a = \frac{(U_n^2 - a)^2}{4U_n^2} \Rightarrow (U_{n+1} - \sqrt{a})(U_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{(U_n - \sqrt{a})^2 (U_n + \sqrt{a})^2}{4U_n^2}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - \sqrt{a} = (U_n - \sqrt{a})^2 \frac{(U_n + \sqrt{a})^2}{4U_n^2} \cdot \frac{1}{U_{n+1} + \sqrt{a}}$$

$$= (U_n - \sqrt{a})^2 \cdot \frac{(U_n + \sqrt{a})^2}{4U_n^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{U_n^2 + a}{U_n}\right) + \sqrt{a}}$$

$$= (U_n - \sqrt{a})^2 \cdot \frac{(U_n + \sqrt{a})^2}{4U_n^2} \cdot \frac{2U_n}{U_n^2 + 2\sqrt{a}\,U_n + a}$$

$$= (U_n - \sqrt{a}) \frac{\cancel{(U_n + \sqrt{a})^2}}{\cancel{4U_n^2}} \cdot \frac{\cancel{2U_n}}{\cancel{(U_n + \sqrt{a})^2}}$$

$$= \frac{(U_n - \sqrt{a})}{2U_n}$$

On a : $U_n \geq \sqrt{a} \Rightarrow 2U_n \geq 2\sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{2U_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$. Alors

$$\frac{(U_n - \sqrt{a})^2}{2U_n} \leq \frac{(U_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$$ Donc $$U_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{(U_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$$

5) Montrons par récurrence :

pour $n = 1$: $U_1 - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right) \Rightarrow U_1 - \sqrt{a} \leq k$ Vraie.

Supposons que la relation est vraie pour (n) (i.e $U_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$) et montrons que la relation est vraie pour $(n+1)$ c'est-à-dire :

$$U_{n+1} - \sqrt{a} \overset{?}{\leq} 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

On a : $$U_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(U_n - \sqrt{a})^2$$
$$\leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right]^2$$

$$\leq \frac{(2\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}\left[\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right]^2$$

$$\leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$ Alors $U_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$.

EX 06 : Calcule les limites :

1) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}.$$

2) $$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+2\cdot 3^n+3\cdot 5^n}{3^n+3\cdot 4^n+3\cdot 5^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{5^n}{5^n}\left[\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+2\left(\frac{3}{5}\right)^n+3}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+3\left(\frac{4}{5}\right)^n+3}\right]$$

$$= 1$$

3) $$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt{n^2-n+1}}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-2n\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{n}$$

$$= -1$$

4) $$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$$

On a : $1! \leq n!$, $2! \leq n!$, $\vdots$, $n! \leq n!$ $\Rightarrow 1!+2!+\cdots+n! \leq n.n! \Rightarrow$

$$\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!} \leq \frac{n\cdot n!}{(2n)!} = \frac{n\cdot n!}{2n(2n-1)\cdots(n+1)n!}$$ Donc

$$= \frac{n}{2n(2n-1)\cdots(n+1)}$$

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{2(2n-1)\cdots(n+1)} \Rightarrow$$

$$0 \leq \lim U_n \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2(2n-1)\cdots(n+1)} = 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to+\infty} U_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

5) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 + 2 + \cdots + n-1 \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)}{2} \cdot n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

6) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\ln n}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1$$

7) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \right)$

On a : $\sqrt{n^4+k} \leq \sqrt{n^4+n} \quad \forall k \leq n.$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$$

$$\Rightarrow U_n \geq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}}$$

et on a : $k \geq 1 \Rightarrow n^4+k \geq n^4+1$

$$\Rightarrow \sqrt{n^4+k} \geq \sqrt{n^4+1} \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} = \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$$

$\Rightarrow U_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$. Alors :

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq U_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\lim \frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}}}_{1} \leq \lim U_n \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} \to 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = 1$$

8) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a^n$, $a \in \mathbb{R}$.

Si $a>1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Si $-1<a<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Si $a=1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

Si $a=-1$: n pair $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

n impair $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -1$

Si $a<-1$: n pair $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

n impair $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

Exo 7 :

1) $a, b > 0$, Montre que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

On a : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

2) On a : $\left.\begin{array}{l} a \leq a \leq b \\ \text{et} \\ a \leq b \leq b \end{array}\right\} \Rightarrow 2a \leq a+b \leq 2b$

$\Rightarrow a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$

et on a :

$a \times a \leq a \times b \leq b.b \Rightarrow a^2 \leq a.b \leq b^2$

$\Rightarrow a \leq \sqrt{ab} \leq b$

3) $U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}$, $V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$

1) Montre que $U_n \leq V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

par récurrence, on a :

pour : $n=0 \Rightarrow U_0 \leq V_0$ Vraie

Supposons $U_n \leq v_n$ et montrons que $U_{n+1} \leq v_{n+1}$

On a : $U_n \leq v_n$, d'après la Q$_1$: $\sqrt{U_n v_n} \leq \frac{U_n + v_n}{2} \Rightarrow$

$U_{n+1} \leq v_{n+1}$. Alors $U_n \leq v_n$.

ii) Montre que (v_n) est décroissante.

$v_{n+1} - v_n = \frac{U_n + v_n}{2} - v_n = \frac{U_n - v_n}{2} \leq 0$ (car $U_n \leq v_n$)

Alors (v_n) décroissante.

iii) Montre que (U_n) croissante.

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\sqrt{U_n v_n}}{U_n} = \frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{U_n}} \geq 1$ (car $U_n \leq v_n \Rightarrow \sqrt{U_n} \leq \sqrt{v_n}$)

Alors $U_{n+1} \geq U_n \Rightarrow (U_n)$ croissante.

* déduire que (U_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

On a : $U_0 \leq U_n \leq v_n \leq v_0$. Alors :

U_n majoré par v_0 et v_n minoré par U_0.

On a :

(U_n) est croissante et majorée par v_0. Alors (U_n) est convergente vers l ($\lim U_{n+1} = \lim U_n = l$)

et (v_n) est décroissante et minorée par U_0. Alors (v_n) est convergente vers l' ($\lim v_{n+1} = \lim v_n = l'$)

et $\lim U_{n+1} = \lim \sqrt{U_n v_n} \Rightarrow l = \sqrt{l l'} \Rightarrow$

$l^2 = l \cdot l' \Rightarrow l = l'$.

<u>EXO 8 :</u> $U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

1) Montrer que $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad n \geq n-1 \Rightarrow n^2 \geq n(n-1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}. \text{ Alors}$$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

2) Montrer que (U_n) est majorée par 2.

On a : $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2} \; ; \; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \; ; \; \cdots\cdots \; \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + 1 \cancel{- \frac{1}{2}} \cancel{+ \frac{1}{2}} \cancel{- \frac{1}{3}} \cancel{+ \frac{1}{3}} - \cdots \cancel{+ \frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow U_n \leq 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow U_n \leq 2$. Alors (U_n) majorée par 2.

3) Montrer que (U_n) est croissante :

$$U_{n+1} - U_n = \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{(n+1)^2} \cancel{-1} \cancel{-\frac{1}{2^2}} - \cdots \cancel{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} > 0. \text{ Alors } (U_n) \text{ est croissante.}$$

4) On a : (U_n) est croissante et majorée par 2. Alors (U_n) est convergente.