La solution de la Série N° 1

Exo 1 :

1) Montrer que : $\sup(-A) = -\inf(A)$

On a : $\forall x \in A : x \geq \inf A \Rightarrow -x \leq -\inf A$

Donc $-\inf A$ est un majorant de $-A$, et puisque $\sup(-A)$ est le plus petit majorant de $-A$, alors : $\boxed{\sup(-A) \leq -\inf A}$ (1)

D'autre part :

$\forall -x \in -A, -x \leq \sup(-A) \Rightarrow x \geq -\sup(-A)$

Donc $-\sup(-A)$ est un minorant de A.

or $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, et donc $\inf A \geq -\sup(-A)$

$\Rightarrow \boxed{-\inf A \leq \sup(-A)}$ (2)

Ainsi : $\sup(-A) = -\inf A$

*) Montrer que : $\inf(-A) = -\sup A$

On a : $\forall x \in A, x \leq \sup A \Rightarrow -x \geq -\sup A$

Donc $-\sup A$ est un minorant de $-A$,

or $\inf(-A)$ est p.G. minorant de $-A$,

alors : $\boxed{\inf(-A) \geq -\sup(A)}$ (1)

D'autre part : on a :

$\forall -x \in -A : -x \geq \inf(-A)$

$\Rightarrow x \leq -\inf(-A)$

donc $-\inf(-A) \geq \sup(A)$

$\Rightarrow \boxed{\inf(-A) \leq -\sup(A)}$ (2)

D'après (1) et (2) on a :

$\inf(-A) = -\sup(A)$

2) Montrer que si $a \leq b \Rightarrow \sup A \leq \inf B$

On a : $\forall a \in A, b \in B : a \leq b \Rightarrow a \leq \inf B$.

Donc $\inf B$ est un majorant de A et puisque $\sup A$ est le plus ~~grand~~ petit majorant de A, alors $\sup A \leq \inf B$

3) $A \cup B$ borné :

Soit $x \in A \cup B$, alors : $x \in A \vee x \in B$

D'où : $\inf A \leq x \leq \sup A \vee \inf B \leq x \leq \sup B$

et donc :

$\min(\inf A, \inf B) \leq x \leq \max(\sup A, \sup B)$

donc $A \cup B$ est borné et on a :

$$\begin{cases} \sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B) \quad \ldots (2) \\ \inf(A \cup B) \geq \min(\inf A, \inf B) \quad \ldots (2) \end{cases}$$

D'autre part : $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$

$\Rightarrow \sup A \leq \sup(A \cup B)$ et $\sup B \leq \sup(A \cup B)$

$\Rightarrow \max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$ ... (1)

D'après (2) et (1) : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

De la même manière on montre l'autre relation

4) Montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

On a : $\forall x \in A$: $\inf A \leq x \leq \sup A$

$\forall y \in B$: $\inf B \leq y \leq \sup B$

D'où :

$\forall x \in A, y \in B$: $\inf A + \inf B \leq x+y \leq \sup A + \sup B$

Alors : $\inf(A+B) \geq \inf A + \inf B$ -- ①

et $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$ -- ②

D'autre part : $\forall x \in A$: $x \leq \sup(A+B) - y$

$\sup(A+B) - y$ est un majorant de A.

$\Rightarrow \sup A \leq \sup(A+B) - y$, $\forall y \in B$

$\Rightarrow y \leq \sup(A+B) - \sup A$, $\forall y \in B$

$\Rightarrow \sup B \leq \sup(A+B) - \sup A$

$\Rightarrow \sup B + \sup A \leq \sup(A+B)$ ... ①

Ainsi : $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup B$

Exo2

1) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r+x \notin \mathbb{Q}$

Nous allons utiliser une preuve par l'absurde ; on suppose que $x+r \in \mathbb{Q}$.

On a : $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Z}$ tq : $r = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$

* $x+r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists p', q' \in \mathbb{Z}$ tq : $x+r = \frac{p'}{q'}$, $q' \neq 0$

Alors : $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{p' \cdot q - p q'}{q' \cdot q} \in \mathbb{Q}$, $q \cdot q' \neq 0$

$\Rightarrow x \in \mathbb{Q}$. C'est un contradiction car $x \notin \mathbb{Q}$, donc $x+r \notin \mathbb{Q}$

* Montrer que $x \notin \mathbb{Q}$; $r \in \mathbb{Q}$: $r \cdot x \notin \mathbb{Q}$

On a : $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow r = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ et $p \neq 0$

$x \cdot r \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \cdot r = \frac{p'}{q'}$, $q' \neq 0$

alors : $x = \frac{p'}{q'} \cdot \frac{q}{p} = \frac{p' \cdot q}{q' \cdot p} \in \mathbb{Q}$ / $p \cdot q' \neq 0$

2) On montre que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors :

$\exists p, q \in \mathbb{N}$ tq $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$

On suppose que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible (i.e p et q sont premiers entre eux) $\Rightarrow p = \sqrt{2} q \Rightarrow p^2 = 2q^2$ i.e. p^2 est pair (p^2 pair $\Leftrightarrow p$ pair, p impair $\Rightarrow p^2$ impair)

$\Rightarrow p$ est pair $\Rightarrow \exists p' \in \mathbb{N}$: $p = 2p' \Rightarrow p^2 = 4p'^2$

$p^2 = 2q^2 = 4p'^2 \Rightarrow q^2 = 2p'^2$, alors : q^2 est pair $\Rightarrow q$ est pair, alors : $\exists q' \in \mathbb{N}$

$q = 2q'$, donc $\frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} = \frac{p'}{q'}$

C'est un contradiction parce que on peut pas simplifier la fraction $\frac{p}{q}$

Alors : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

3) On montre $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

On suppose que $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

On a : $(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$

$\Rightarrow (\sqrt{3}-\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow (\sqrt{3}+\sqrt{2}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ impossible.

4) Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$

On suppose $\frac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow \ln 2^q = \ln 3^p \Rightarrow 2^q = 3^p$ impossible car 2^q est pair et 3^p est impair

et donc $\frac{\ln 3}{\ln 2} \notin \mathbb{Q}$

Exo3 :

1) A borné $\Rightarrow$ B borné.

A borné $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A$: $m \leq x \leq M$

$B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B$; $x \in A \xRightarrow{A\text{ borné}} m \leq x \leq M$

$\Rightarrow$ B borné

• $\sup A \geq \sup B$

On a : $B \subset A$, alors : $\forall x \in B$: $\inf A \leq x \leq \sup A$

Donc $\sup A$ est un majorant de B, et puisque $\sup B$ est le plus petit majorant de B alors : $\sup B \leq \sup A$

• $\inf A \leq \inf B$:

On a : $B \subset A \Rightarrow \forall x \in B : x \geq \inf A$

Donc $\inf A$ est un minorant de B, et donc $\inf A \leq \inf B$

Exo4 : $A = \{a_n \in \mathbb{R} / a_n = \frac{n+3}{\frac{n}{4}+1}, n \in \mathbb{N}\}$

1) Montrer que A est borné :

i.e. $\exists M, m \in \mathbb{R}, \forall a_n \in A$:

$$m \leq a_n \leq M$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n+3}{\frac{n}{4}+1} = 4\left(\frac{n+3}{n+4}\right) = 4\left(\frac{n+4-1}{n+4}\right) = 4\left[1 - \frac{1}{n+4}\right] = 4 - \frac{4}{n+4}$$

$n \geq 0 \Rightarrow n+4 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n+4} \leq \frac{1}{4}$

$\Rightarrow -\frac{4}{n+4} \geq -\frac{4}{4} \Rightarrow 4 - \frac{4}{n+4} \geq 3$ ...

$\Rightarrow \boxed{a_n \geq 3}$ ... ①

$n \geq 0 \Rightarrow n+4 \geq 4 > 0 \Rightarrow \frac{1}{n+4} > 0$

$\Rightarrow \frac{-4}{n+4} < 0 \Rightarrow 4 - \frac{4}{n+4} < 4$

$\Rightarrow \boxed{a_n < 4}$ ... ②

Alors : $\forall n \geq 0$: $3 \leq a_n < 4$ (pour l'instant on peut seulement dire que 4 est un majorant et 3 est un minorant)

Puisque $3 \in A$, alors $\inf A = \min A = 3$

[pour $n=0$: $a_0 = 3 \in A$, et 3 est un minorant de A, alors $\inf A = \min A = 3$]

montrons que $\sup A = 4$

$\sup A = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a_n \in A : a_n < 4 \text{ (vérifié)} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : a_n > 4 - \varepsilon \end{cases}$

Soit $\varepsilon > 0$, d'où : $a_n > 4 - \varepsilon \Rightarrow 4 - \frac{4}{n+4} > 4 - \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{4}{n+4} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+4}{4} > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow n+4 > \frac{4}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{4}{\varepsilon} - 4$

il suffit de prendre $n_\varepsilon = [\frac{4}{\varepsilon} - 4] + 1$

donc $\sup A = 4$.

$B = \{b_n \in \mathbb{R} / b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 4, n \in \mathbb{N}^*\}$

On Montre que B est borné :

On a : $n \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{n} \leq 2$; $\frac{1}{n^2} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 3 \Rightarrow \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + 4 \leq 7$

$\Rightarrow \boxed{b_n \leq 7}$ ... ①

On a aussi :

$\frac{2}{n} > 0$ et $\frac{1}{n^2} > 0 \Rightarrow \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} > 0$

$\Rightarrow \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + 4 > 4 \Rightarrow \boxed{b_n > 4}$ ... ②

D'après ① et ②, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$4 < b_n \leq 7$$

donc B est borné dans $\mathbb{R}$ et $\sup B$ et $\inf B$ existe.

• 7 est un majorant de B et $7 \in B$

$\Rightarrow \sup B = \max B = 7$

On montre que $\inf B = 4$

$\inf B = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall b_n \in B : b_n > 4 \text{ (vérifiée)} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* : b_n < 4 + \varepsilon \end{cases}$

On a $b_n < 4 + \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 4 < 4 + \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} < \varepsilon$

On recherche seulement un n_ε tq $\frac{3}{n} < \varepsilon$

(car $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} < \frac{3}{n}$ car $n^2 \geq n \Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$)

On a : $\frac{3}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{3}{\varepsilon}$

Il suffit de prendre $n_\varepsilon = [\frac{3}{\varepsilon}] + 1$

$\Rightarrow \inf B = 4$

Alors : $\inf B = 4 = \sup A$

Exo 5 : $B = \{\alpha x + \beta / x \in [-2, 1]\}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

On pose $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \alpha x + \beta$

• Si $\alpha = 0 \Rightarrow f(x) = \beta$, f est constante alors $B = \{\beta\}$ est borné

et $\sup B = \inf B = \beta$

• Si $\alpha > 0$: alors f est croissante

On a : $-2 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(-2) \leq f(x) \leq f(1)$

$\Rightarrow -2\alpha + \beta \leq \alpha x + \beta \leq \alpha + \beta$

$\forall x \in [-2, 1] \Rightarrow B$ est borné

$\Rightarrow \sup B$ et $\inf B$ existent

$-2\alpha + \beta$ est un minorant de B et $-2\alpha+\beta \in B$

$\Rightarrow \inf B = \min B = -2\alpha + \beta$

et $\sup B = \max B = \alpha + \beta$

• Si $\alpha < 0$: alors f est decroissante

De la même manière, on a

$\inf B = \alpha + \beta$, $\sup B = -2\alpha + \beta$.

$C = [0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{0, \frac{p}{q}, 1, 0 < \frac{p}{q} < 1\}$

Alors : $\sup C = 1$, $\inf C = 0$

• $D = \{\frac{n-1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}^*\}$

On a

$\frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}(1 - \frac{3}{2n+1})$

On a : $n \geq 1 \Rightarrow \frac{-3}{2n+1} \geq -1 \Rightarrow 1 - \frac{3}{2n+1}$;

$\Rightarrow \frac{1}{2}(1 - \frac{3}{2n+1}) \geq 0 \Rightarrow \inf D = 0$

même manière de Exo 4

Exo 6 : 1) Mettre sous la forme $a + ib$:

$\frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{15}{5} + \frac{6}{5} i$

2) Resoudre l'équation dans $\mathbb{C}$:

$z^2 + z + 1 = 0$, $\Delta = -3$, $z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

• $z^6 = 1$, On peut écrire $z = re^{i\theta}$

$z^6 = 1 \Rightarrow (re^{i\theta})^6 = 1 \Rightarrow r^6 e^{i6\theta} = 1 e^{i0}$

$\Rightarrow r^6 = 1$ et $6\theta = 0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

puisque $r > 0$, alors $r^6 = 1 \Rightarrow r = 1$.

$6\theta = 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{\pi k}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

$k = 0 : \theta = 0$, $k = 2 : \theta = \frac{2\pi}{3}$, $k = 4 : \theta = \frac{4\pi}{3}$

$k = 1 : \theta = \frac{\pi}{3}$, $k = 3 : \theta = \pi$, $k = 5 : \theta = \frac{5\pi}{3}$

$k = 6 : \theta = \frac{6\pi}{3} = 2\pi \equiv 0$

Donc nous avons 6 solution différente

$S = \{1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, -1, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}\}$