

Chapitre 4. Réponses fréquentielles des systèmes linéaires

4.1 La réponse fréquentielle

Ce chapitre présente les méthodes permettant d'étudier la réponse fréquentielle d'un système dont la fonction de transfert est connue. L'analyse fréquentielle s'intéresse au comportement du système considéré en régime permanent, en réponse à une entrée sinusoïdale, c'est à dire sa réponse harmonique, en fonction de l'amplitude et de la fréquence du signal d'entrée [4-9, 11, 12].

Définition 4.1 :

La réponse fréquentielle d'un système linéaire de fonction de transfert $G(s)$ à une sinusoïde $u(t) = X \sin(\omega t)$ d'amplitude donnée X et de pulsation donnée ω est une sinusoïde $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$ de même pulsation ω et dont l'amplitude Y et le déphasage φ dépendent de la pulsation ω avec : $Y = X |G(j\omega)|$ ($|G(j\omega)|$ est le gain du système) et $\varphi = \arg(G(j\omega))$ (déphasage entre la sortie et l'entrée).

En générale, la réponse harmonique d'un système est déterminée par le nombre complexe $G(j\omega)$ qu'on appelle fonction de transfert harmonique (ou fonction de transfert complexe). La fonction de transfert complexe $G(j\omega)$ s'obtient simplement en remplaçant la variable de Laplace s par $j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert $G(s)$. L'étude de $G(j\omega)$ en fonction de la pulsation ω permet donc de déduire le comportement fréquentiel du système.

La fonction de transfert harmonique est souvent représentée graphiquement par le lieu de transfert (le lieu des points $G(j\omega)$ quand la pulsation ω varie de 0 à l'infini). On distingue trois représentations graphiques du lieu de transfert : diagrammes de Bode, de Nyquist et de Black. Dans la suite, on étudie les diagrammes de Bode et de Nyquist [4, 7, 9, 11, 12].

4.2 Diagramme de Bode

Cette représentation est constituée de deux tracés. Le premier représente le gain du système en decibels (dB), quand la pulsation ω (rad/s) varie :

$$G_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| \quad (4.1)$$

Le deuxième montre la phase φ en degré ou en rad, quand la pulsation ω (rad/s) varie :

$$\varphi = \arg\{G(j\omega)\} \quad (4.2)$$

La pulsation est sur une échelle logarithmique en abscisse (Figure 4.1). Il est fréquent de placer le tracé de phase en dessous du tracé d'amplitude comme montre la Figure 4.2.

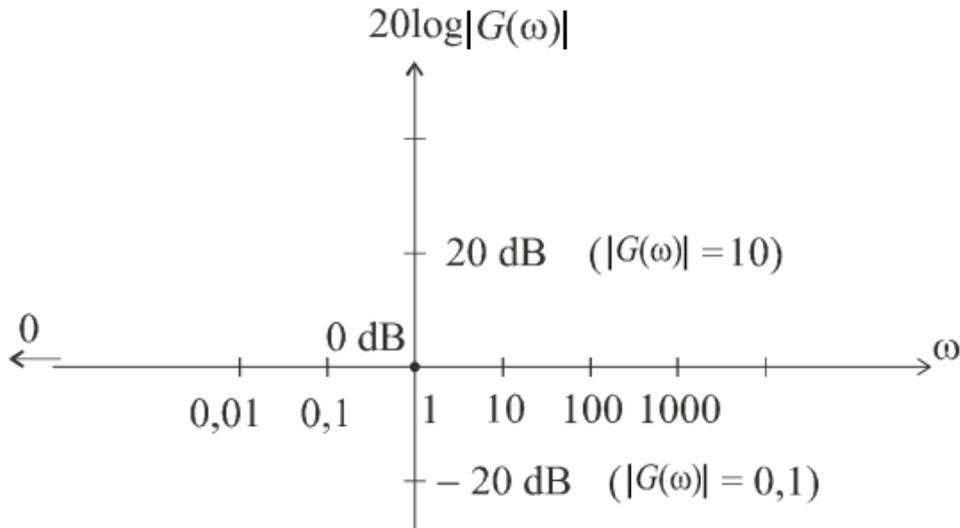


Figure 4.1 : Échelle logarithmique du diagramme de Bode

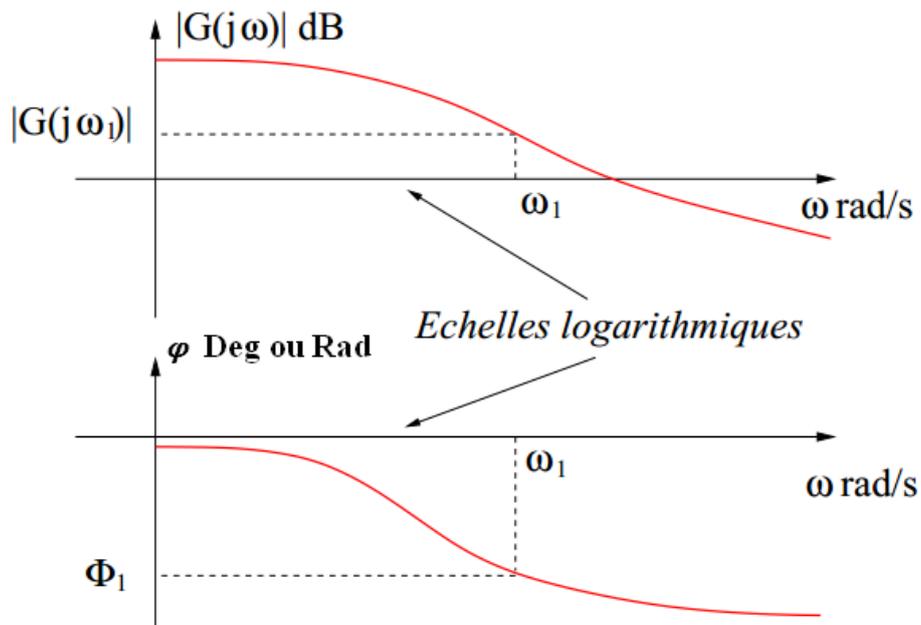


Figure 4.2 : Diagramme de Bode

D'une manière générale, on porte directement les valeurs de ω sur l'axe des abscisses en respectant l'échelle logarithmique et en plaçant la pulsation $\omega = 1$ à l'origine de cet axe puisqu'elle correspond à $\log_{10} \omega = 0$.

4.2.1 Méthode de tracé du diagramme de Bode

Cette sous-section présente une méthode permettant la construction du diagramme de Bode (gain et phase). En effet, toute fonction de transfert peut être décrite par la relation :

$$G(s) = K \frac{\prod (1 + \tau_i s) \prod (1 + 2(\xi / \omega_{n_j})s + (s / \omega_{n_j})^2)}{s^N \prod (1 + \tau_k s) \prod (1 + 2(\xi / \omega_{n_i})s + (s / \omega_{n_i})^2)} \quad (4.3)$$

Par conséquent le module en dB du système considéré est la somme des modules élémentaires en dB. Par ailleurs, la phase du système est la somme des arguments.

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \sum_i \log_{10} |G_i(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \sum_i \varphi_i(\omega) \quad (4.4)$$

L'avantage du diagramme de Bode est que les courbes des éléments constituant la fonction de transfert suivent des asymptotes. De ce fait, il est d'usage de tracer une représentation approximée de la réponse harmonique en utilisant le tracé de diagrammes asymptotiques des éléments constituant la fonction de transfert et en les additionnant afin d'obtenir le tracé asymptotique global.

Systèmes du premier ordre

La fonction de transfert complexe d'un système canonique du premier ordre s'écrit :

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\tau\omega)} \quad (4.5)$$

d'où : $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}, \varphi(\omega) = -\arctg(\tau\omega).$

Le tracé du diagramme asymptotique consiste à séparer l'espace des pulsations en deux domaines, selon que $\tau\omega$ est très grand ou très petit devant 1.

- si $\tau\omega \ll 1$, soit $\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \approx K$ donc $20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K$ la

courbe de gain suit une asymptote horizontale d'ordonnée $20 \log K$,

- pour $\tau\omega \gg 1$, soit $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ on a :

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \approx \frac{K}{\tau\omega} \text{ donc } 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \tau - 20 \log \omega. \quad \text{Ceci}$$

correspond à est une droite de pente -20 dB/décade , ce qui signifie que le gain diminue de 20 dB lorsque la pulsation est multipliée par 10. Cette droite coupe l'autre asymptote au point $\omega = 1/\tau$.

À la pulsation $\omega = 1/\tau$, $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = -3\text{dB}$ ce qui signifie que le trace réel se trouve donc à 3 dB en dessous des asymptotes (voir Figure 4.3). Cette pulsation est appelée pulsation de coupure.

Remarque 4.1 : dans la courbe de gain, les asymptotes ne peuvent prendre pour pente que les valeurs multiples de 20 dB/décade. On appelle pente d'ordre n , une pente égale à $20n$ dB/décade.

Concernant le déphasage, on a :

- pour $\tau\omega \ll 1$, soit $\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow \varphi(\omega) \approx 0$ la courbe de phase est une asymptote horizontale à l'ordonnée 0 rad,
- pour $\tau\omega \gg 1$, soit $\omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow \varphi(\omega) \approx \frac{\pi}{2}$ alors la courbe de phase est une asymptote horizontale à l'ordonnée $-\pi/2$ rad.

À la pulsation $\omega = 1/\tau$, on obtient un déphasage de $-\pi/4$ rad.

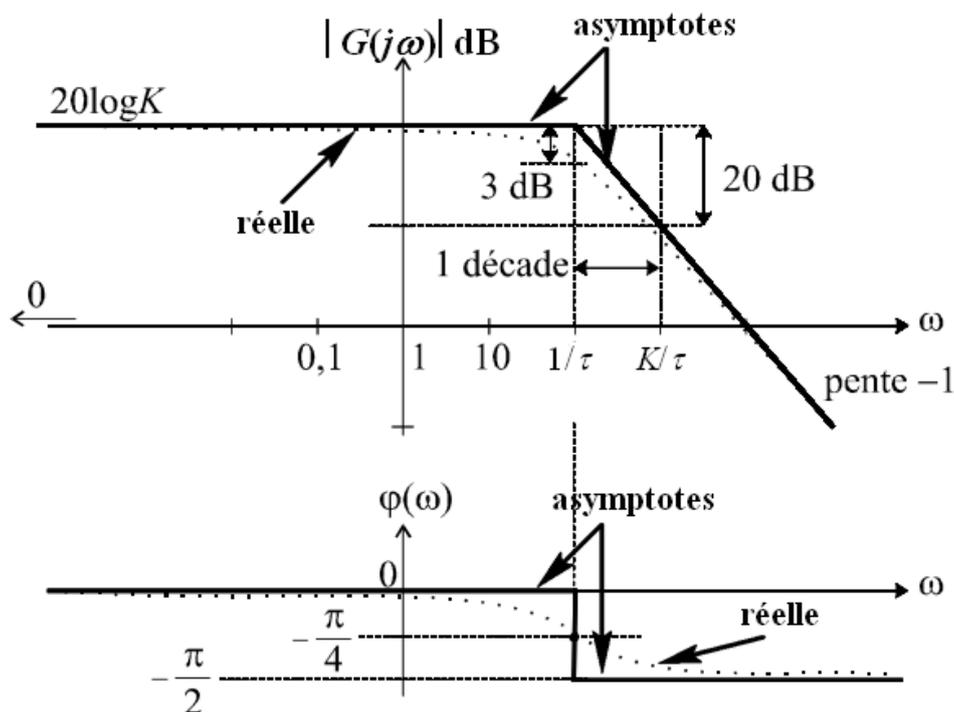


Figure 4.3 : Diagramme de Bode d'un système du premier ordre

Systèmes du second ordre

La fonction de transfert complexe d'un système canonique du second ordre s'écrit :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\xi\omega}{\omega_n}} \quad (4.6)$$

$$\text{d'où : } |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}}, \varphi(\omega) = -\text{arctg} \left(\frac{\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \right).$$

Les asymptotes sont obtenues de manière identique à celle qui a été faite pour le système canonique du premier ordre.

- pour $\omega \rightarrow 0$: $|G(j\omega)| \approx K$ donc $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log K$ et $\varphi(\omega) \approx 0$.
- pour $\omega \rightarrow +\infty$, on a :

$$|G(j\omega)| \approx \frac{K\omega_n^2}{\omega^2} \text{ donc } |G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log K + 40 \log \omega_n - 40 \log \omega \text{ et } \varphi(\omega) \approx -\pi. \text{ La courbe}$$

de gain suit donc une direction asymptotique qui est une droite de pente -40 dB/décade en hautes fréquences.

Les deux asymptotes se coupent au point d'abscisse $\omega = \omega_n$ (pulsation de cassure). À cette pulsation ($\varphi(\omega) = -\pi/2$). En effet, l'intersection commune des deux asymptotes est tel que :

$$20 \log K + 40 \log \omega_n - 40 \log \omega = 20 \log K, \text{ soit } 40 \log \omega_n - 40 \log \omega = 0 \Rightarrow \omega = \omega_n \quad (4.7)$$

Près de la pulsation de cassure, il existe une pulsation de résonance $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ pour laquelle le gain présente un maximum $|G(j\omega_r)| = G_{\text{max}} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$, si $\xi < 0.707$ (Figure 4.4). On définit alors le facteur de résonance Q (ou de surtension) par le rapport du gain maximal sur le gain à l'origine :

$$Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2}} \quad (4.8)$$

Exemple 4.1 :

Considérons un système de fonction de transfert [9]:

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+100)}{(s+10)} \quad (4.9)$$

La fonction de transfert complexe est donnée par :

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega+1)(j\omega+100)}{(j\omega+10)} \quad (4.10)$$

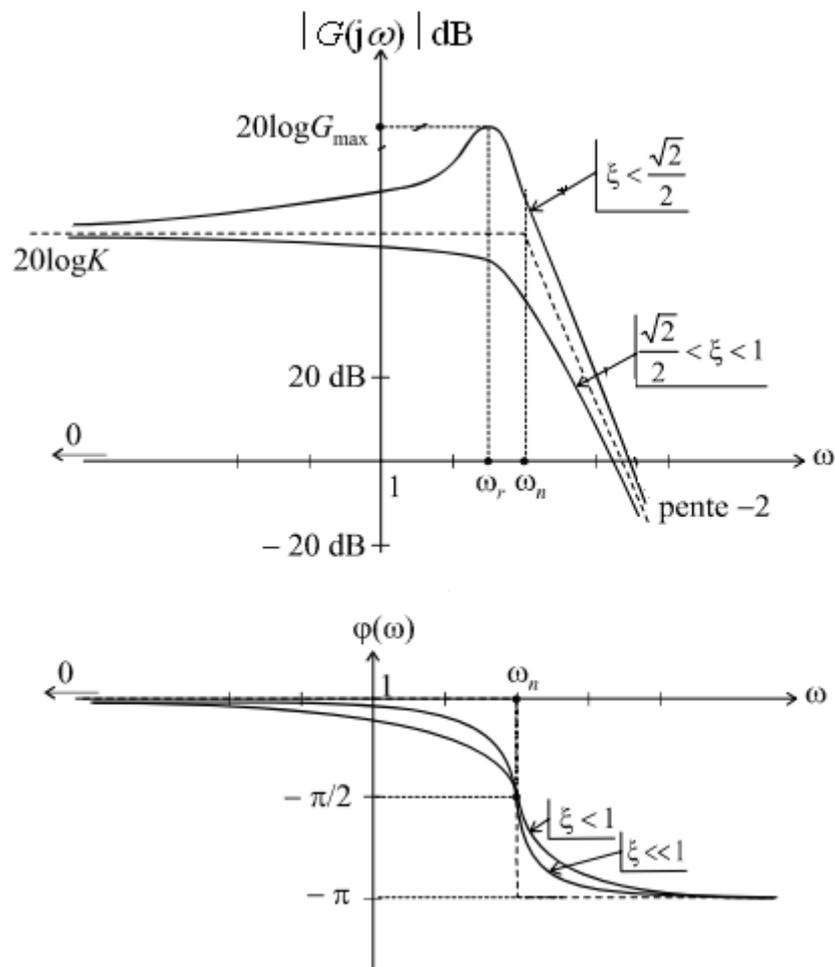


Figure 4.4 : Diagramme de Bode d'un système du second ordre

$$\text{d'où : } |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1} \sqrt{\omega^2 + 100^2}}{\sqrt{\omega^2 + 10^2}}, \varphi(\omega) = \arctg(\omega) + \arctg(\omega/100) - \arctg(\omega/10).$$

Considérons les équivalents des trois expressions $\sqrt{\omega^2 + 1}$, $\sqrt{\omega^2 + 10^2}$ et $\sqrt{\omega^2 + 100^2}$:

$$\omega \ll 1 \Rightarrow \sqrt{\omega^2 + 1} \approx 1, \omega \gg 1 \Rightarrow \sqrt{\omega^2 + 1} \approx \omega$$

$$\omega \ll 10 \Rightarrow \sqrt{\omega^2 + 10^2} \approx 10, \omega \gg 10 \Rightarrow \sqrt{\omega^2 + 10^2} \approx \omega$$

$$\omega \ll 100 \Rightarrow \sqrt{\omega^2 + 100^2} \approx 100, \omega \gg 100 \Rightarrow \sqrt{\omega^2 + 100^2} \approx \omega$$

on peut résumer les différentes situations dans le Tableau 4.1.

Il s'agit donc de tracer un diagramme de Bode asymptotique en approximant la courbe entre deux pulsations de coupures ($\omega=1$, $\omega=10$ et $\omega=100$), par ses segments de droites calculés dans le Tableau 4.1 (Figure 4.5).

La direction asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en multipliant l'ordre de la pente par $\pi/2$ (Figure 4.6).

Tableau 4.1 : Calcul des équivalents asymptotiques du gain

ω	0	1	10	100	$+\infty$
$\sqrt{\omega^2 + 1}$	1	ω	ω	ω	ω
$\sqrt{\omega^2 + 100^2}$	100	100	100	ω	ω
$\sqrt{\omega^2 + 10^2}$	10	10	ω	ω	ω
$ G(j\omega) $	10	10ω	100	ω	ω
$20\log_{10} G(j\omega) $	20 dB	$20 \text{ dB/déc} + 20 \log \omega$	40 dB	$20 \log \omega$	$20 \log \omega$
penne	0	20 dB/déc	0	20 dB/déc	

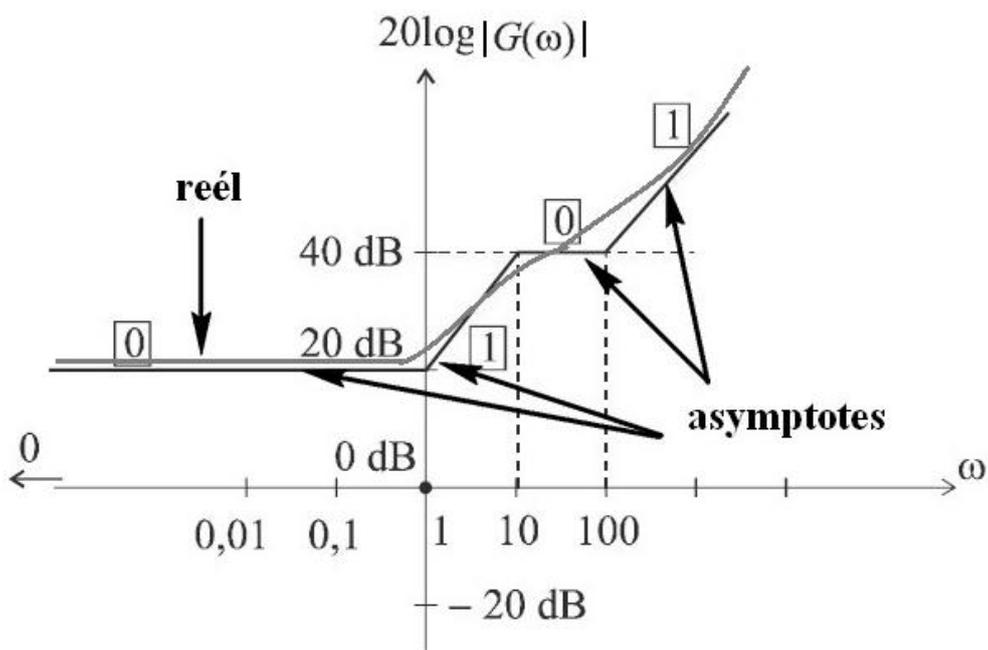


Figure 4.5 : Diagramme de Bode de gain du système (4.9)

4.2.2 Cas particuliers

Quelques cas particuliers sont maintenant étudiés. Ils peuvent souvent aider au tracé de diagrammes plus complexes.

- le terme d'intégration d'ordre N ($1/(j\omega)^N$) a une phase constante valant $-90 \times N$ deg. Le module est défini par :

$$20 \log_{10} \left| \frac{K}{(j\omega)^N} \right| = 20 \log_{10} \frac{K}{\omega^N} = 20 \log_{10} K - 20N \log_{10} \omega \quad (4.11)$$

La courbe de gain est donc une droite de pente $-20 \times N$ dB/dec qui coupe l'axe 0 dB au point $\omega_{co} = (K)^{1/N}$,

- le terme de dérivation d'ordre N ($K(j\omega)^N$) se déduit directement du précédent en changeant le signe de la pente de la courbe de gain et le signe de la phase.

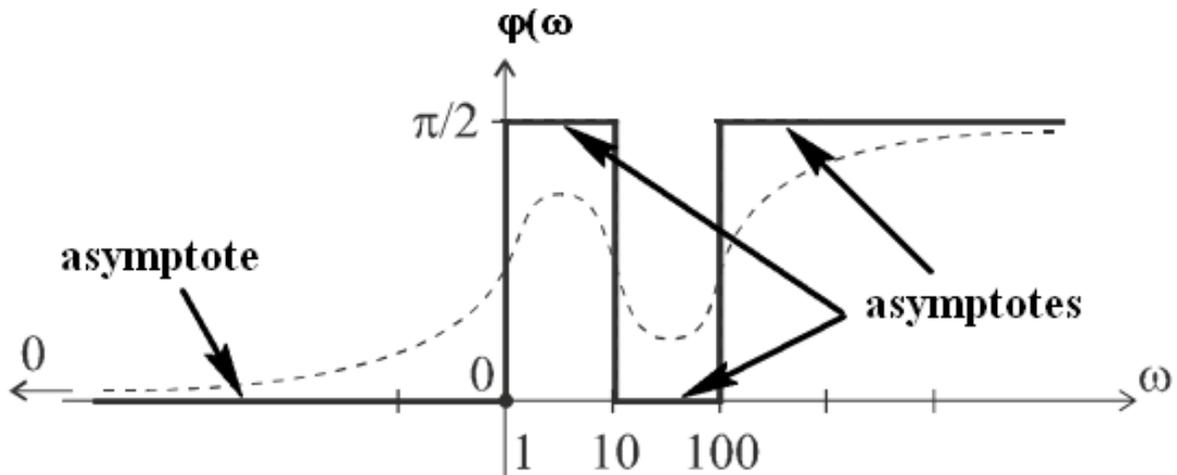


Figure 4.6 : Diagramme de Bode de phase du système (4.9)

4.3 Diagramme de Nyquist

Le diagramme de Nyquist, correspond à la représentation dans le plan complexe de la fonction de transfert complexe $G(j\omega) = \text{Re}(G(j\omega)) + j\text{Im}(G(j\omega))$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ (Figure 4.7) [7, 9, 11, 12]. Ce diagramme est toujours orienté dans le sens des ω croissants.

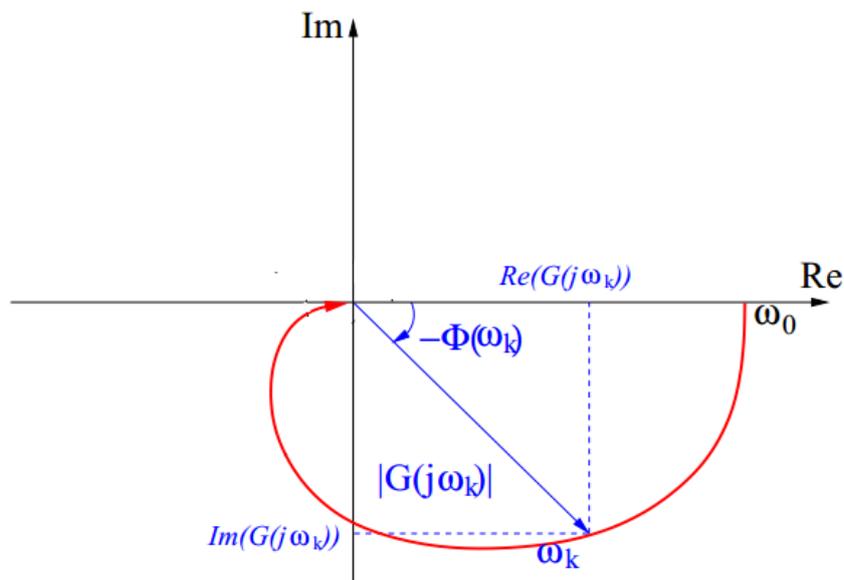


Figure 4.7 : Diagramme de Nyquist

Systèmes du premier ordre

Pour tracer le diagramme de Nyquist, il faut décomposer $G(j\omega)$ en partie réelle et partie imaginaire, on a :

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\tau\omega)} = \frac{K(1-j\tau\omega)}{(1+j\tau\omega)(1-j\tau\omega)} = \frac{K(1-j\tau\omega)}{(1+\tau^2\omega^2)} \quad (4.12)$$

$$\text{soit : } G(j\omega) = \frac{K}{1+\tau^2\omega^2} + j \frac{-K\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2} = X + jY \quad (4.13)$$

Le lieu de Nyquist d'un système du premier ordre est un demi-cercle de centre $(K/2, 0)$ et de rayon $K/2$ comme le montre la Figure 4.8.

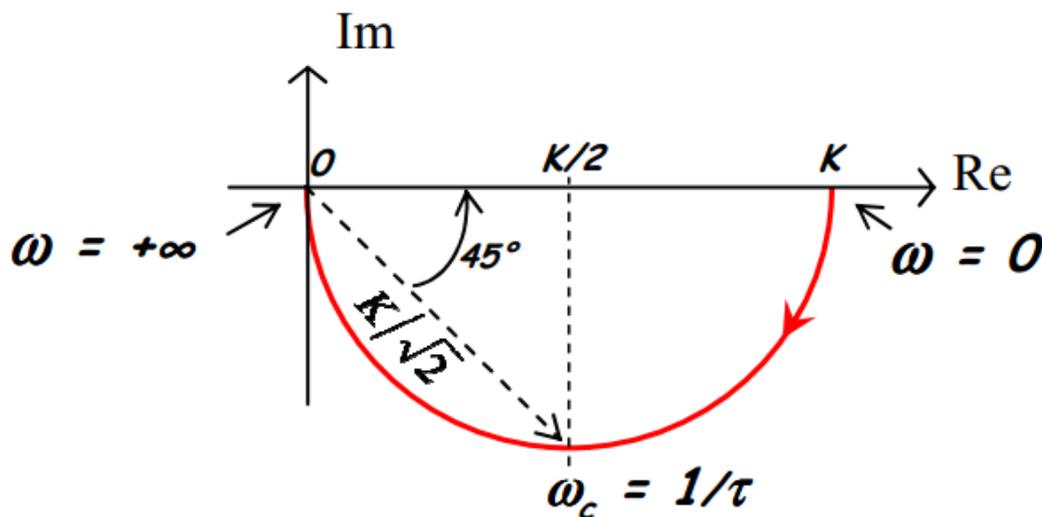


Figure 4.8 : Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre

A la pulsation de cassure pour $\omega = \omega_c = 1/\tau$: $|G(j\omega)| = K/\sqrt{2}$, $\varphi(\omega) = -45^\circ$.

Systèmes du second ordre

Le diagramme de Nyquist d'un système du second ordre est défini à partir de l'expression suivante :

$$G(j\omega) = \frac{K(1-(\omega/\omega_n)^2)}{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2} - 2j \frac{K\xi(\omega/\omega_n)}{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2} \quad (4.14)$$

La Figure 4.9 illustre les tracés obtenus en fonction des différents cas. On remarquera que tous les tracés ont les mêmes points de départ et d'arrivée. Aux hautes fréquences (ω tend vers l'infini), l'analyse asymptotique montre que la phase tend vers $-\pi$ c'est-à-dire la courbe

est tangente à l'axe des réels, par la gauche, au point 0. Une éventuelle résonance ($\xi < 0.707$) s'observe par une courbe qui présente alors un maximum de gain (une inflexion de la courbe) [11].

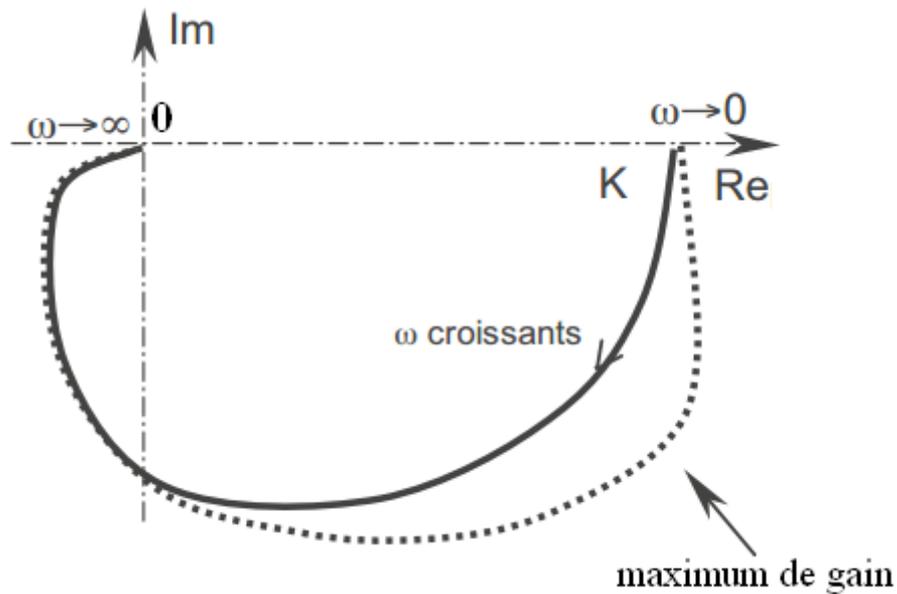


Figure 4.9 : Diagramme de Nyquist d'un système du second ordre

4.4 Marge de phase et marge de gain

Définition 4.2 : (Marge de phase)

La marge de phase est définie par [4, 7, 9, 11]:

$$M_{\varphi} = \varphi(\omega_{co}) + 180^{\circ} \quad (4.15)$$

où ω_{co} est la pulsation de coupure à 0 dB de la fonction de transfert complexe $G(j\omega)$:

$$20\log_{10} |G(j\omega_{co})| = 0\text{dB} \Rightarrow |G(j\omega_{co})| = 1 \quad (4.16)$$

Définition 4.3 : (Marge de gain)

La marge de gain est définie par [4, 7, 9, 11]:

$$M_G = \frac{1}{|G(j\omega_{180^{\circ}})|} \Rightarrow M_G\text{dB} = -20\log_{10} |G(j\omega_{180^{\circ}})| \quad (4.17)$$

où $\omega_{180^{\circ}}$ est la pulsation pour laquelle la phase de $G(j\omega)$ vaut :

$$\arg[G(j\omega_{-180^{\circ}})] = -180^{\circ} \quad (4.18)$$