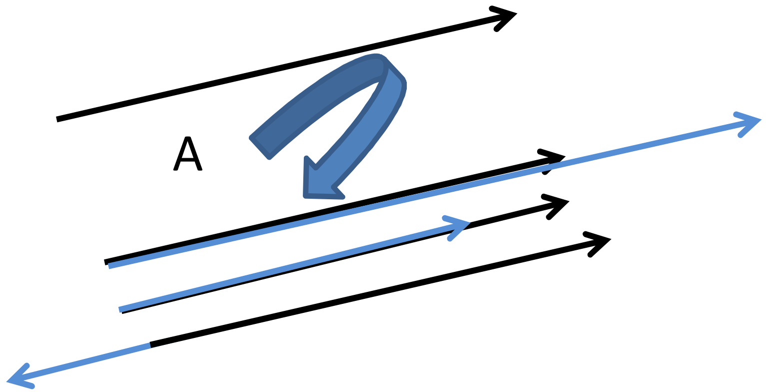
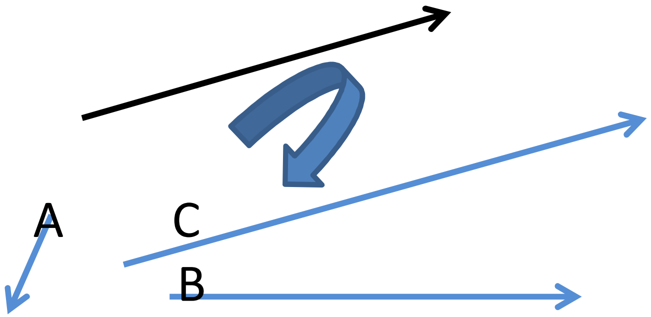
Vecteurs et valeurs propres

Vecteurs et valeurs propres

$$f \in \mathcal{L}(E,F) : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \quad AX = Y \text{ avec } A \in M_n(K)$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \quad \xrightarrow{A} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{y_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_n} \end{matrix}$$





$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vecteurs et valeurs propres

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$AX = \lambda X$$

$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$: vecteur propre de A

correspondant a la valeur propre $\lambda = 3$

Vecteurs et valeurs propres

Définition

- On dit que λ est une valeur propre de la matrice A s'il existe un vecteur x non nul solution de

$$Ax = \lambda x$$

- Le vecteur x est alors dit vecteur propre associé à λ

Vecteurs et valeurs propres

$$\boldsymbol{\lambda} = ?$$

on a $\lambda x = Ax$

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda x - Ax \\ 0 &= \lambda \boldsymbol{I} x - Ax \\ 0 &= (\lambda \boldsymbol{I} - A)x \\ &\Rrightarrow \quad Bx = 0 \end{aligned}$$

- $\det(\lambda \mathrm{I} - A) = 0$: équation caractéristique de A
- $\det(\lambda \mathrm{I} - A)$

  polynôme caractéristique de A, noté $P_A(\lambda)$

Calcul des vecteurs et valeurs propres

- Les valeurs propres d'une matrice A d'ordre n sont les racines dans K du polynôme caractéristique associé à A

  → racines de $P_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - A)$

- À toute valeur propre λ d'une matrice A, est associé au moins un vecteur non nul v tel que $Av = \lambda v$, appelé vecteur propre de la matrice A correspondant à la valeur propre λ.

Spectre, Rayon spectral, …

- Le spectre de A, noté $\sigma_{\mathbb{K}}(A)$est l'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$.

- Si $\sigma_{\mathbb{K}}(A) \neq \Phi$, le rayon spectrale de A est le réel positif défini par $\rho(A) = \max\{|\lambda| \ / \lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(A)\}$

Quelques propriétés

- $\sigma_{\mathbb{K}}(A) = \sigma_{\mathbb{K}}(A^t)$
- Soit la matrice A d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, et possédant toujours n valeurs propres λ_i, $i = 1, \ldots, n$ distinctes ou confondues, on a les propriétés suivantes :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Rappel
Notions de l’algèbre

Application linéaire (rappel)

Définition 1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application de E dans F est une application linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :*

1. $f(u+v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in E,$
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u), \forall u \in E$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{K}.$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$ ou $L(E,F)$
Si une application f est linéaire alors :

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $f(-u) = -f(u)$

Matrice et Application linéaire

E

F

$$x = \sum_{j=1}^{m} x_j . e_j \qquad f(x) = y \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i . b_i$$

$$\begin{array}{c}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
y_1 = \mathrm{a}_{11}\, x_1 + \mathrm{a}_{12}\, x_2 + .. + \mathrm{a}_{1m}\, x_m \\
y_2 = \mathrm{a}_{21}\, x_1 + \mathrm{a}_{22}\, x_2 + .. + \mathrm{a}_{2m}\, x_m \\
\vdots \qquad \ddots \qquad \ddots \qquad \vdots \\
y_n = \mathrm{a}_{n1}\, x_1 + \mathrm{a}_{n2}\, x_2 + .. + \mathrm{a}_{nm}\, x_m
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n
\end{array}$$

$$\boldsymbol{y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot x_j}$$

Morphisme(représentation matricielle)

$$\boldsymbol{y_i} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{a_{ij}} \cdot \boldsymbol{x_j}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{matrix} \bullet \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{f(X) = A \cdot X}$$

avec $\boldsymbol{A \in M_{n,m}(K)}$ et $\boldsymbol{X \in K^m}$

A est dite la matrice de l'application f de la base canonique $\{e_j\}$ $de\, R^m$ vers la base canonique $\{b_i\}$ de R^n

Récapitulatif

A matrice

Structure de données

(i,j) → a_{ij} (1,1)→ a_{11} (1,2)→ a_{12}....

Valeur propre correspondant à un vecteur propre

$\boldsymbol{A}$ matrice d'une application linéaire $\boldsymbol{f}$

→On étend aux matrices toutes les définitions relatives aux applications linéaires

Application linéaire (rappel)

Ayant E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire,

Image de f $$Im(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$

- $f(E)$ l'image de E par f est
- noté ***Im*** $(\boldsymbol{f})$; est un sous espace vectoriel de F

Noyau de f

- noté $ker(\boldsymbol{f})$; $$\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

Rang de f $$\mathrm{Rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

- Pour $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq F$ un espace vectoriel de dimension finie,

La dimension de $\mathrm{Im}\, f$, noté $\mathrm{Rg}(f)$ ou rang f

Rang de matrice

Calcul

Pour une famille de n vecteurs $de\,E$, $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq E$,

1. $0 \leq \mathrm{rg}(\{u_1, \dots, u_n\}) \leq n$: le rang est inférieur ou égal au nombre d'éléments dans la famille.
2. E est de dimension finie alors $\mathrm{rg}(\{u_1, \dots, u_n\}) \leq \dim(E)$: le rang est inférieur ou égal à la dimension de E.
3. rg $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = 0 \Leftrightarrow u_1, u_2, \dots u_n = 0$
4. rg $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = n \Leftrightarrow \{u_1, u_2, \dots u_n\}$ famille libre
5. Théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$

$$\dim(\ker(\mathrm{A})) + \mathrm{rang}(\mathrm{A}) = \mathrm{m}$$

Synthèse des concepts

Pour $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_n}(\mathbb{K})$

$\mathbf{A}$ *est inversible.* $\Longleftrightarrow$

$\det(\mathbf{A}) \neq 0$ $\Longleftrightarrow$

$\text{rang}(\mathbf{A}) = n$ $\Longleftrightarrow$

La seule solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *est la solution triviale.* $\Longleftrightarrow$

Les vecteurs lignes de $\mathbf{A}$ *sont linéairement indépendants.* $\Longleftrightarrow$

Les vecteurs colonnes de $\mathbf{A}$ *sont linéairement indépendants.* $\Longleftrightarrow$

$\lambda = 0$ *n'est pas une valeur propre de* $\mathbf{A}$. $\Longleftrightarrow$

A matrice à diagonale dominante $\Longleftrightarrow$