# Corrigé type d'examen Finale 2023

***Exercice 1 :***

1. ***Donnons la forme des solutions***
   L'équation caractéristique de (**??**) est
$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$
   Ainsi, les racines caractéristiques sont
$$\alpha = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$$
   La solution générale de l'équation (**??**) s'écrit
$$J_n = A\,(2)^n + B\,(-1)^n$$
   Utilisons les conditions initiales, on obtient
$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}$$
   Donc
$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$
2. Par reccurence :
   - Pour $n = 2$ on a
$$J_1J_3 - J_2^2 = 2 = -(-2)^{2-1}$$
     donc la propsition est vrais pour $n = 2$.
   - Supposons que la proposition est vrais pour $n$, c'es-à-dir
$$J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2 = -(-2)^n$$
     et montrons la proposition pour $n+1$. On a
$$\begin{aligned} J_nJ_{n+2} - J_{n+1}^2 &= J_n(J_{n+1} + 2J_n) - J_{n+1}(J_n + 2J_{n-1}) \\ &= 2J_n^2 - 2J_{n+1}J_{n-1} \\ &= -2(J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2) = 2(-2)^n = -(-2)^{n+1}. \end{aligned}$$
   - Donc
$$J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2 = -(-2)^n, \quad \forall n \geq 2.$$
3. Pour $n = 1$ on a
$$J_{1+r}J_2 - J_{r+2}J_1 = J_{1+r} - J_{r+2} = -(J_{2+r} - J_{r+1}) = -2J_r = (-2)^1J_r$$
   donc la propsition est vrais pour $n = 1$.

- Supposons que la proposition est vrais pour $n$, c'es-à-dir
$$J_{n+r}J_{n+1} - J_{n+r+1}J_n = (-1)^nJ_r$$
  et montrons la proposition pour $n+1$. On a
$$\begin{aligned} J_{n+r+1}J_{n+2} - J_{n+r+2}J_{n+1} &= J_{n+r+1}(J_{n+1} + 2J_n) - (J_{n+r+1} + 2J_{n+r})J_{n+1} \\ &= J_{n+r+1}J_{n+1} + 2J_{n+r+1}J_n - J_{n+r+1}J_{n+1} - 2J_{n+r}J_{n+1} \\ &= 2J_{n+r+1}J_n - 2J_{n+r}J_{n+1} \\ &= -2(J_{n+r}J_{n+1} - J_{n+r+1}J_n) = -2(-2)^nJ_r = (-2)^{n+1}J_r. \end{aligned}$$

- Donc

$$J_{n+r}J_{n+1} - J_{n+r+1}J_n = (-2)^n J_r, \quad \forall n \geq 1, r \in \mathbb{N}.$$

***Exercice 2 :***

1. ***Détrminons les points d'équilibres de*** (**??**) ***:***
   Soit $\overline{x}$ un point d'équibitre de l'équation, donc

$$\begin{aligned} x = \frac{\alpha\overline{x}}{1+\overline{x}^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{x}(\overline{x}^2 + (1-\alpha)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{x} = 0 \vee \overline{x}^2 = \alpha - 1 \end{aligned}$$

   - Si $\alpha > 1$ : les ponts d'équilibres sont : $\overline{x} = 0, \overline{x} = \sqrt{\alpha - 1}$.
   - Si $\alpha < 1$ :le seul point d'équilibres est $\overline{x} = 0$.

2. ***Stabilité locale des points d'équilibres :***

$$\begin{aligned} f: \quad [0, +\infty[^2 \quad &\longrightarrow [0, +\infty[ \\ (x, y) \quad &\longmapsto \frac{\alpha y}{1 + xy}. \end{aligned}$$

   On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-\alpha y^2}{(1+xy)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\alpha}{(1+xy)^2}.$$

   - Si $\alpha > 1$ : les points d'équilibres sont : $\overline{x} = 0, \overline{x} = \sqrt{\alpha - 1}$.
     - $\overline{x} = 0$

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \alpha.$$

       L'équation linéaire associé est

$$y_{n+1} = \alpha y_{n-1}$$

       Le polynôme caractéstique est $P(\lambda) = \lambda^2 - \alpha$, donc les valeurs proprs sont

$$\lambda = \pm\sqrt{\alpha} > 1$$

       Donc $\overline{x} = 0$ est instable.
     - $\overline{x} = \sqrt{\alpha - 1}$ :

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{\alpha-1}, \sqrt{\alpha-1}) = \frac{1-\alpha}{\alpha}, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{\alpha-1}, \sqrt{\alpha-1}) = \frac{1}{\alpha}.$$

       L'équation linéaire associé est

$$y_{n+1} = \frac{1-\alpha}{\alpha} y_n + \frac{1}{\alpha} y_{n-1}$$

       Le polynôme caractéstique est $P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda - \frac{1}{\alpha}$, donc les valeurs proprs sont

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\alpha}$$

       On a $|\lambda_1| = 1$, donc en peut rien dire.

- Si $\alpha < 1$ le seul points d'équilibre est : $\overline{x} = 0$.

$$|p_0| + |p_1| = \alpha < 1$$

d'aprés le Théorème de Clark $\overline{x} = 0$ est localement assymptotiquement stable.

3. ***Stabilité globale des points d'équilibres :***
Si $\alpha < 1$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}} \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \alpha x_{n-1} \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \alpha^2 x_{n-2} \\ &\vdots \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \alpha^n x_{-1} \to 0 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, alors $\overline{x} = 0$ est globalement attractif, par conséquent $\overline{x} = 0$ est globalement assymptotiquement stable.

***<u>Exercice 3 :</u>***

1. ***Montrons que la solution du système (1) est unique :***
Soit $(x_n, y_n)_{n\geq n_0}$ une solution du système (1) avec les conditions initilaes, alors

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{x_n y_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{\beta y_n}{x_{n-1} y_{n-1}} \textbf{(0.5 Pts)}$$

Supposons que $(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n)_{n\geq n_0}$ une autre solution du système (1) avec les conditions initilaes , alors

$$\widetilde{x}_{n+1} = \frac{\alpha}{\widetilde{x}_n \widetilde{y}_n^2}, \quad \widetilde{y}_{n+1} = \frac{\beta \widetilde{y}_n}{\widetilde{x}_{n-1} y_{n-1}} \textbf{ (0.5 Pts)}$$

donc

$$(x_n, y_n) = (\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n), \quad pour\ n = -1, 0.$$

Et comme

$$\widetilde{x}_{n+1} = \frac{\alpha}{\widetilde{x}_n \widetilde{y}_n^2}, \quad \widetilde{y}_{n+1} = \frac{\beta \widetilde{y}_n}{\widetilde{x}_{n-1} y_{n-1}}$$

on obtient que

$$(x_1, y_1) = (\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1)$$

De même on obtient

$$(x_n, y_n) = (\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n), \quad pour\ n = 2, 3, \ldots$$

Alors

$$(x_n, y_n) = (\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n), \quad pour\ n \geq 0. \textbf{ (1.5\_ Pts)}$$

Par conséquent on a l'unisité de solution du système (1) avec les conditions initiales.

2. On a

$$\begin{cases} x_{n+2} = \dfrac{3}{x_{n+1} y_{n+1}^2} = \dfrac{x_n x_{n-1}^2 y_{n-1}^2}{4} \\ x_{n+3} = \dfrac{3}{x_{n+2} y_{n+2}^2} = \dfrac{3}{4} x_n \end{cases} \quad \begin{cases} y_{n+2} = \dfrac{2 y_{n+1}}{x_n y_n} = \dfrac{4}{x_n x_{n-1} y_{n-1}} \\ y_{n+3} = \dfrac{2 y_{n+2}}{x_{n+1} y_{n+1}} = \dfrac{4}{3} y_n. \end{cases} \quad \textbf{(1.5 Pts)}$$

3.

4. La forme explicite de la solution du (1)

   On a $x_{n+3} = \frac{3}{4}x_n, \quad y_{n+3} = \frac{4}{3}y_n, \quad n \geq 1,$**(0.5 Pts)** donc

$$\begin{cases} x_{3n} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{3}} x_0 \\ x_{3n+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{3}} \dfrac{3}{x_0 y_0^2} \\ x_{3n+2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{3}} \dfrac{x_0 x_{-1}^2 y_{-1}^2}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{3n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{3}} y_0 \\ y_{3n+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{3}} \dfrac{2y_0}{x_{-1} y_{-1}} \\ y_{3n+2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{3}} \dfrac{4}{x_0 x_{-1} y_{-1}} \end{cases} \qquad n \geq 0 \ \textbf{(1.5 Pts)}$$

.