Centre Universitaire de Mila
Institut de Mathématiques et Informatiques
Première Année Master Mathématiques Appliquées et Fondamentals 2023/2024

Matière : *Equations aux différences*
Responsable : *Y. Halim*

Série de TD N° 2

Exercice 1 :

Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Pell définie par

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n, \quad P_0 = 0, P_1 = 1.$$

1. Donner la forme des solutions (Formule de Benet) de la suite de Pell.
   (on note les racines par α et β, avec $\alpha > \beta$).
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P_{n+r}}{P_n}$, avec $r \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n, \quad \forall n \geq 1. \tag{1}$$

$$P_n^2 - P_{n+m}P_{n-m} = (-1)^{n-m}P_m^2, \quad \forall n, m \in N \tag{2}$$

   avec $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est la suite de Pell.

Exercice 2 :

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}}, \quad n \geq 0 \tag{3}$$

avec les valeurs initilaes x_{-1}, x_0 sont des nombres réels non nules.

1. Détrminer les points d'équilibres de l'équation (3).
2. Montrer que la solution de l'équation (3) est périodique de période p (déterminer la valeur de p).
3. Les points d'équilibres de l'équation (3) sont-ils globalemnet stable ?
4. Déduire la forme de solution de l'équation (3).

Exercice 3 : (Examen 2023)

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

avec $\alpha > 0, \alpha \neq 1, x_0, x_{-1} \in [0, +\infty[$

1. Détrminer les points d'équilibres de l'équation (4).
2. Etudier la stabilité locale des points d'équilibres de l'équation (4).
3. Montrer que si $\alpha < 1$, alors $\overline{x} = 0$ est globalement asymptotiquement stable.
4. Tracer le graphique approximative de l'équation (4) dans le cas $\alpha < 1$.