Centre Universitaire de Mila **Année universitaire** 2023/2024

Institut des Mathématiques et Informatique **Domaine**: MI-Mathématiques (1[er]année)

Analyse I

Série d'exercices N°04

Semestre I

Exercice 1:

1. Etudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 dans les cas suivants:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}, \ x_0=0 \ ; \ f(x)=\begin{cases} \sin x\sin\frac{1}{x} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}, \ x_0=0 \ ;$$

$$f(x)=\begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x^2-a^2}\right) & \text{si} \ |x|<a \\ 0 & \text{si} \ |x|\geq a \end{cases}, |x_0|=a \text{ où } a\in\mathbb{R}_+. \quad (*)$$

Exercice 2:

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad 0\leq x\leq 1 \\ ax^2+bx+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$.

2. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$g(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x<e \\ a\ln x+b & \text{si} \quad x\geq e \end{cases}$$

Déterminer les nombres réels a et b pour que g soit dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(x)$.

Exercice 3:

Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\neq 0, \quad n\in\mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

Etudier suivant les valeurs de n

a) la continuité de f.

b) la dérivabilité de f.

c) la continuité de la fonction dérivée.

Exercice 4:

Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions suivantes:

$$f(x)=sin^2x \quad ; \quad g(x)=\ln(1+x) \quad ; \quad k(x)=e^x\sin x \quad ; \quad h(x)=\frac{1+x}{1-x} \quad (*).$$

Exercice 5:

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = (1-k)^2x^2 + (1+k)x^3, \; k \in \mathbb{R}$.

   - Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'origine $(x=0)$ est un extremum local de f.

2. Déterminer les extremums de $f(x) = \sin x^2$ dans l'intervalle $[0, \pi]$.

3. Déterminer les extremums de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6:

1. Peut-on appliquer le théorème de Rolle aux fonctions suivantes:

   a) $f(x) = \sin^2 x$ sur $[0, \pi]$.

   b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2x}$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   c) $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ sur $[-1, 1]$. (*)

Exercice 7: (En appliquant le théorème des Accroissements finis)

Montrer les inégalités suivantes :

1) $x < \dfrac{y-x}{\ln y - \ln x} < y \; ; \; \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*; 0 < x < y.$

2) $a \leq \sqrt{a^2 + x^2} \leq a + \dfrac{x^2}{a} \; ; \; \forall a > 0.$

Exercice 8:

Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n; n+1]$, montre que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 9:

En utilisant le théorème de l'Hopital, calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}; \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{2\ln(x+1)}{x^2}.$$