Centre Universitaire de Mila **Année universitaire** 2023/2024

Institut des Mathématiques et Informatique **Domaine**: MI-Mathématiques (1[er] année)

Analyse I Série d'exercices N°02 **Semestre I**

Exercice 1:

Montrer par récurrence que:

1) $1+2+3+........+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) $1^2+2^2+3^2+........+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) $\forall n\in\mathbb{N},\forall x>-1;(1+x)^n\geq 1+nx$.

Exercice 2:

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par: $u_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}$ n'est pas convergente.

Exercice 3:

Posons $u_2=1-\dfrac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n\geq 3$:

$$u_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)............\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Calculer u_n. En déduire que l'on a $\lim u_n=\dfrac{1}{2}$

Exercice 4:

Démontrer que les deux suites suivantes sont adjacentes:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},\qquad v_n=u_n+\frac{1}{n}$$

Exercice 5:

Soit $a>0$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour u_0 un réel vérifiant $u_0>0$, et par la relation:

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)$$

On se propose de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\sqrt{a}$.

1) Montrer que

$$u_{n+1}^2-a=\frac{\left(u_n^2-a\right)^2}{4u_n^2}$$

2) Montrer que si $n\geq 1$, alors $u_n\geq\sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

4) En utilisant la relation $u_{n+1}^2-a=\left(u_{n+1}+\sqrt{a}\right)\left(u_{n+1}-\sqrt{a}\right)$ donner une majoration de $u_{n+1}-\sqrt{a}$ en fonction de $u_n-\sqrt{a}$.

5) Si $u_1-\sqrt{a}\leq k$ et pour $n\geq 1$ montrer que: $u_n-\sqrt{a}\leq 2\sqrt{a}\left(\dfrac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$.

Exercice 6:

Calculer les limites suivantes, si elles existent, des suites suivantes définies par:

1) $u_n = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

2) $u_n = \frac{2^n + 2.3^n + 3.5^n}{3^n + 3.4^n + 3.5^n}$.

3) $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1} - 2\sqrt{n^2-n+1}}{n}$.

4) $u_n = \frac{1! + 2! + ... + n!}{(2n)!}$.

5) $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n-1}{n^2}$.

6) $u_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$.

7) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + ... + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$

8) $u_n = a^n$ où $a \in \mathbb{R}$

Exercice 7:

1) Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

2) Montrer les inégalités suivantes $(0 \leq a \leq b)$:

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \quad \text{et} \quad a \leq \sqrt{ab} \leq b.$$

3) Soient u_0 et v_0 des réel strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante: $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

i) Montrer que $u_n \leq v_n; \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.

iii) Montrer que (u_n) est croissante.

- En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

Exercice 8:

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$.

1) Montrer que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 2.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

4) En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.