NOTIONS DE PROBABILITÉS

Sommaire

1. Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est un processus dans lequel intervient le hasard et qui est susceptible de produire différents résultats ; elle se caractérise de quatre façons :

1. nous ***ne pouvons*** prédire avec ***certitude*** le résultat,
2. nous pouvons décrire à priori l'ensemble de tous les résultats possibles,
3. elle peut être répétée,
4. elle a un but précis.

Exemples d'expériences aléatoires

1. Lancer deux dés et observer le total
2. Tirer le numéro gagnant d'une loterie
3. Jeter une pièce de monnaie deux fois et noter le côté qui apparaît.

2. Espace échantillonnal

L'**espace échantillonnal** d'une expérience aléatoire est l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience, noté Ω

Exemples

Les espaces échantillonnaux associés aux expériences aléatoires présentées dans l'exemple précédent sont respectivement :

1. $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,\ 11, 12\}$
2. $\Omega = \{1000, 1001, \dots, 9999\}$
3. $\Omega = \{\mathrm{ff}, \mathrm{fp}, \mathrm{pf}, \mathrm{pp}\}$

3. Événement

Un **événement** relié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble de l'espace échantillonnal Ω. On note habituellement les événements par $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \ldots$

Exemple

Soit l'expérience consistant à jeter une pièce de monnaie deux fois et de noter le côté qui apparaît. Ainsi, l'espace échantillonnal est

$$\Omega = \{\mathrm{ff}, \mathrm{fp}, \mathrm{pf}, \mathrm{pp}\}$$

Voici quelques exemples d'événements :

$\boldsymbol{A} =$ " obtenir face au premier lancer " = $\{fp, ff\}$;

$\boldsymbol{B} =$ " obtenir face au deuxième lancer " $=\ \{pf, ff\}$;

$\boldsymbol{C} =$ " obtenir le même côté lors des deux lancers " $=\ \{pp, ff\}$;

$\boldsymbol{D} =$ " obtenir des côtés différents lors des deux lancers " $=\ \{pf, fp\}$;

À l'aide des opérations sur les ensembles, nous pouvons, à partir d'un ou de plusieurs événements, en former de nouveaux.

Exemple

Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux événements, alors :

1. $\overline{\boldsymbol{A}}$ est l'événement qui se réalise si l'événement $\boldsymbol{A}$ ne se réalise pas. On dit que $\overline{\boldsymbol{A}}$ est l'événement complémentaire de l'événement $\boldsymbol{A}$.
2. $\boldsymbol{A \cap B}$ est l'événement pour lequel les deux événements se réalisent (Si $\boldsymbol{A \cap B} = \emptyset$**,** on dit que $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des événements mutuellement exclusifs)
3. $\boldsymbol{A \cup B}$ est l'événement pour lequel au moins un des événements $\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{B}$ se réalise.
4. $\boldsymbol{A \setminus B}$ est l'événement pour lequel $\boldsymbol{A}$ est réalisé mais non $\boldsymbol{B}$.

4. Calcul des probabilités

4.1. Ensemble fondamental

Un espace échantillonnal est dit ***fondamental*** si chacun de ses résultats possède autant de chances que les autres de se réaliser.

Exemple

- Si on lance un dé régulier on a autant de chance d'observer un 6 que toute autre face.
- Si on tire une pièce de monnaie, le résultat *pile* a autant de chances de se produire que le résultat *face*.

4.2. Calcul de la probabilité

Si un espace échantillonnal est *fondamental*, alors la **probabilité** qu'un événement $A \subseteq \Omega$ se réalise, notée $\boldsymbol{P(A)}$, est obtenue de la formule suivante :

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{Nombre\ d'éléments\ dans\ A}{Nombre\ d'éléments\ dans\ \Omega}$$

Exemple

D'un jeu de 52 cartes conventionnel, nous tirons une carte au hasard.

$\Omega = \{ 2\spadesuit \text{ à } A\spadesuit , 2\heartsuit \text{ à } A\heartsuit , 2\diamondsuit \text{ à } A\diamondsuit , 2\clubsuit \text{ à } A\clubsuit \}$

Soit l'événement $\boldsymbol{A}$ = "obtenir un ♠". Alors,

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{Nombre\ de\ cartes\ de\ pique}{Nombre\ de\ cartes\ au\ total} = \frac{13}{52} = 0.25$$

4.3. Espace échantillonnal non fonadamental

Un espace échantillonnal pour lequel au moins un élément a plus ou moins de chances de se produire que les autres est dit ***non fondamental***.

Exemple

Soit l'événement "lancer deux dés réguliers et en faire la somme des résultats". L'espace échantillonnal est décrit par l'ensemble

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Les éléments de cet ensemble ne sont pas équiprobables. Par exemple, il y a trois façons différentes d'obtenir une somme de 4 : lancer 1-3, 3-1 ou encore 2-2. Toutefois, seul le roulé 1-1 nous procurera la somme de 2. Nous vous laissons vérifier que les façons différentes d'obtenir une somme de 7 sont encore plus nombreuses (il y en a 6 en tout).

Lorsqu'un espace échantillonnal est *non fondamental*, la probabilité que l'événement $A \subseteq \Omega$ se réalise, notée $\boldsymbol{P(A)}$, est obtenue de la formule suivante :

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{\#A'}{\#\Omega'} = \frac{Nombre\ de\ chances\ attribuées\ à\ A}{Nombre\ total\ de\ chances}}$$

Exemple

Une urne contenant 10 boules dont 3 sont vertes (v), 2 sont rouges (r) et 5 sont bleues (b). De cette urne, nous tirons une boule au hasard. L'espace échantillonnal de cette expérience aléatoire est

$\boldsymbol{\Omega = \{v, r, b\}}$

Les éléments n'ont certes pas la même probabilité de se réaliser.

Soit l'événement $\boldsymbol{V}$ = "piger une boule verte". La probabilité que cet événement se produise est

$$P(V) = \frac{Nombre\ de\ boules\ vertes}{Nombre\ total\ de\ boules} = \frac{3}{10} = 0.3$$

Or, soit l'événement $\boldsymbol{R}$ = "piger une boule rouge". La probabilité que cet événement se produise est

$$P(R) = \frac{Nombre\ de\ boules\ rouges}{Nombre\ total\ de\ boules} = \frac{2}{10} = 0.2$$

Quel que soit le type d'espace échantillonnal, fondamental ou non, il est possible d'effectuer des opérations sur les événements (union, intersection, différence, complément). La section suivante discute de l'effet qu'ont ces opérations sur les probabilités.

5. Propriétés des probabilités

Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$**,** des événements quelconques. Alors, les propriétés suivantes doivent être satisfaites :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Nous pouvons déduire en combinant les propriétés 2 et 3 que la probabilité d'obtenir l'ensemble vide est nulle :

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0.$$

Exemple

Un étudiant estime à 65% ses chances de réussir son cours de statistiques, à 80% ses chances de réussir son cours de finance et à 50% se chances de réussir les deux matières.

Notons $\boldsymbol{S}$ l'événement "réussir en Statistiques", et $\boldsymbol{F}$ l'événement "réussir en Finance". Alors, nous représentons la probabilité que ces événements se produisent par

$$\boldsymbol{P(S)} = 0,6$$

$$\boldsymbol{P(F)} = 0,8$$

Respectivement. Pour ce qui est de l'événement "réussir les deux matières", il s'agit ici de l'intersection des événements $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{F}$… rappelons-nous que l'intersection représente bien le fait que l'un et l'autre des événements sont réalisés. Ainsi, selon l'énoncé de l'étudiant

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{F}) \;=\; 0{,}5.$$

Quelle est la probabilité que l'étudiant réussisse en Statistiques mais non en Finance?

Il s'agit ici d'évaluer $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}\backslash\boldsymbol{F})$. Selon la propriété 5, nous trouvons

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}\backslash\boldsymbol{F}) \;=\; \boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}) \;-\; \boldsymbol{P}(\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{F}) \;=\; 0{,}65 \;-\; 0{,}5 \;=\; 0{,}15.$$

Quelle est la probabilité qu'il réussisse en Finance mais non en Statistiques?

Nous cherchons cette fois à évaluer $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}\backslash\boldsymbol{S})$:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}\backslash\boldsymbol{S}) \;=\; \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}) \;-\; \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{S}) \;=\; 0{,}8 \;-\; 0{,}5 \;=\; 0{,}3.$$

Il y a donc 15% des chances que l'étudiant réussisse en Statistiques mais échoue en Finance. Toutefois, la probabilité que le contraire se produise s'élève à 30%.

Quelle est la probabilité qu'il réussisse en Finance ou en Statistiques?

L'événement "réussir en Finance ou en Statistiques est représenté par $\cup\, \boldsymbol{S}$. Nous voulons donc évaluer $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{S})$. La propriété 4 nous permet d'obtenir le résultat espéré :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{S}) &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F} \cap \boldsymbol{S}) \\ &= 0{,}8 + 0{,}65 - 0{,}5 \\ &= 0{,}95. \end{aligned}$$

Il y a donc 95% des chances que l'étudiant réussisse l'un ou l'autre de ces cours.

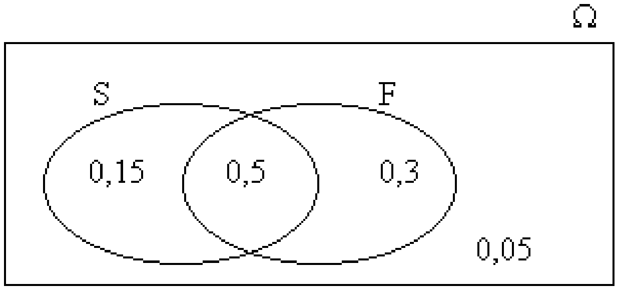
Quelle est la probabilité qu'il ne réussisse ni en Finance, ni en Statistiques?

D'abord, il faut d'abord bien identifier l'événement "échouer les deux matières". Il faut voir en celui-ci le complément de l'événement "réussir au moins une des deux matières" que venons de présenter, d'où

$$\begin{aligned} P(\overline{F \cup S}) &= 1 - P(F \cup S) \\ &= 1 - 0.95 \\ &= 0.05. \end{aligned}$$

Il y a donc 5% des chances que l'étudiant échoue les deux cours.

Voici un diagramme résumant les probabilités des événements présentés ci-dessus.



6. Les probabilités conditionnelles

Il est question de probabilités conditionnelles dès que nous sommes intéressés à la probabilité qu'un événement **A** se produise, *sachant qu'un autre événement* $\boldsymbol{B}$ *est réalisé*. Nous noterons par $\boldsymbol{P(A \mid B)}$ cette probabilité. En quelque sorte, ce type de probabilité nous oblige à considérer $\boldsymbol{B}$ (plutôt que $\boldsymbol{\Omega}$ comme étant l'espace échantillonnal duquel nous étudions les chances de réalisation de $\boldsymbol{A}$.

Pour tout $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, éléments de $\boldsymbol{\Omega}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple

Revenons au cas présenté dans le dernier exemple.

Quelle est la probabilité que l'étudiant réussisse en Statistiques sachant qu'il a réussi le cours de Finance?

Il s'agit ici de calculer $\boldsymbol{P(S \mid F)}$:

$$P(S|F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{0.5}{0.8} = 0.625.$$

Remarquons tout de suite que la probabilité que $\boldsymbol{S}$ se réalise, initialement de 0,65, est diminuée lorsque présumons la réalisation de $\boldsymbol{F}$. Ce calcul nous permet de conclure que ces événements ne sont *indépendants* l'un de l'autre, c'est-à-dire que la réalisation ou non réalisation d'un événement modifie la probabilité qu'un autre se réalise.

Exemple

Une urne contenant 10 boules dont 3 sont vertes (v), 2 sont rouges (r) et 5 sont bleues (b). De cette urne, nous tirons une boule au hasard. L'espace échantillonnal de cette expérience aléatoire est

$$\boldsymbol{\Omega = \{v, r, b\}}$$

Soient les événements

$\boldsymbol{V}$ $=$ "piger une boule verte"

$\boldsymbol{R}$ $=$ "piger une boule rouge"

$\boldsymbol{B}$ $=$ "piger une boule bleue"

Calculer la probabilité de piger une boule verte sachant que la boule pigée est verte ou rouge.

$$P(V|V\cup R) = \frac{P(V)}{P(V\cup R)} = \frac{3/_{10}}{5/_{10}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

7. Événements indépendants

Soient deux événements $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$. Nous disons de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ qu'ils sont des ***événements indépendants*** si et seulement si

$$\boldsymbol{P(A \mid B) = P(A)}$$

Cette définition peut être interprétée de la façon suivante : si la réalisation de l'événement $\boldsymbol{B}$ ne modifie pas la probabilité que l'événement $\boldsymbol{A}$ se produise, alors $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont indépendants.

Exemple

Soit l'expérience consistant à jeter une pièce de monnaie deux fois et de noter le côté qui apparaît. Ainsi, l'espace échantillonnal est

$$\boldsymbol{\Omega = \{\mathrm{ff}, \mathrm{fp}, \mathrm{pf}, \mathrm{pp}\}}$$

Quelle est la probabilité que le deuxième tirage produise le résultat *pile* sachant que le résultat du premier tirage était *face*.

Notons par $F1$ l'événement "premier tirage donne *face*" et par $P2$, l'événement "le deuxième tirage donne *pile*". On nous demande d'évaluer $P(P2|F1)$:

$$P(P2|F1) = \frac{P(P2 \cap F1)}{P(F1)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Or, la probabilité d'obtenir face *pile* lors du deuxième tirage est

$$P(P2) = 2/4 = 0.5.$$

Ainsi, $\boldsymbol{P(P2|F1) = P(P2)}$. Les événements $\boldsymbol{P2}$ et $\boldsymbol{F1}$ sont donc indépendants. Nous vous laissons le soin de vérifier que ceci ne serait pas le cas des événements $\boldsymbol{P2}$ et $\boldsymbol{F2}$, où $F2$ représente l'événement "obtenir *face* lors du deuxième tirage".

De la définition d'indépendance, nous obtenons le résultat suivant concernant l'intersection d'événements : si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des événements indépendants, alors $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$.

En effet, puisque par définition $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont indépendants si et seulement si $\boldsymbol{P(A \mid B) = P(A)}$, alors

$$\begin{aligned} & P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ \Leftrightarrow\ & P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ \Leftrightarrow\ & P(A \cap B) = P(A)P(B) \end{aligned}$$