Variables Aléatoires

1. Variable aléatoire discrète

2. Variable aléatoire continue

Variable aléatoire discrète

1.1 Définition:

Une variable aléatoire X est une application définie sur

un univers Ω dans un ensemble E de $\mathbb{R}$.

$$X : \Omega \rightarrow E$$

Si E est dénombrable, on dit que la variable aléatoire X est ***discrète***

Exemple introductif

Soit une famille de 4 enfants dont les deux parents sont

porteurs d'un gène d'une maladie héréditaire. La variable

aléatoire

X nombre d'enfants atteints de cette maladie dans la famille
c'est une variable aléatoire a cinq réalisations possibles:
$X = 0; 1; 2; 3; 4.$

1.2 Loi de probabilité de variable aléatoire discrète

A chacune des réalisations x_i *de la variable aléatoire* X *est associée une*

probabilité $P(X = x_i) = p_i, \;\; (0 \leq p_i \leq 1, \forall i)$.

L'ensemble de couples $(x_i; p_i)$ *forme une* ***loi de probabilité*** *si*

La somme de toutes les probabilités est égale à 1.

C'est-à-dire

Etablir la loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est :

- Déterminer l'ensemble E de toutes les issues possibles de l'expérience $x1$; $x2$; … ; xn
- Calculer les probabilités correspondantes $p1$; $p2$; … ; pn
- Résumer dans un tableau les résultats :

Valeur possible de la variable aléatoire	$x1$	$x2$	……….	xn	Total
Probabilité correspondante	$p1$	$p2$		pn	1

2. 3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition :

La fonction de répartition associée à la variable aléatoire X, est la

fonction, notée $F \; ou \; F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1] par$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

1.4 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ P_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ P_1 + P_2 & x_2 \leq x < x_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 & x_3 \leq x < x_4 \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 & x_4 \leq x < x_5 \\ \\ P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

2. 3 Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire :

La représentation graphique est une fonction en escalier.

Propriétés:

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) *Elle est croissante au sens large:*

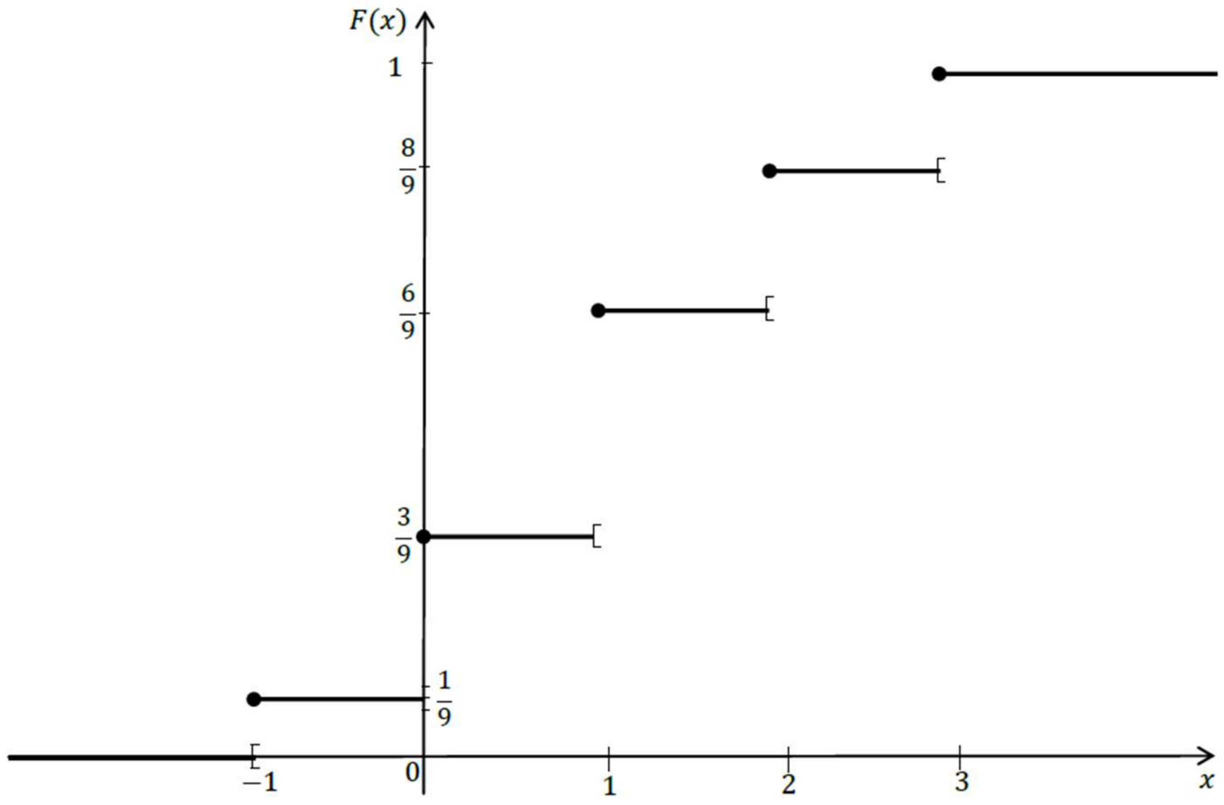
Si $a \leq b \quad alors\ F(a) \leq F(b)$

3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Exemple:

X=xi	-1	0	1	2	3
P(X=xi) =Pi	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9
F(xi)	1/9= p1	3/9= p1+p2	6/9= p1+p2+p3	8/9= p1+p2+p3+p4	1= p1+p2+p3+p4+ p5

Fonction de répartition



2. Paramètres d’une variable aléatoire

2.1 Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Définition :

L'espérance mathématique d’une variable aléatoire X qui suit une loi de probabilité est la moyenne :

$E(X) = p1 \times x1 + p2 \times x2 + p3 \times x3 + \cdots + pn \times x\mathrm{n}$

$$E(X) = \Sigma pi \times x\mathrm{i}$$

2. Paramètres d'une variable aléatoire
2.2 Variance d'une variable aléatoire

Définition :

Il s'agit d'un indicateur mesurant la dispersion des valeurs x_i autour de E(X)

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Transformation affine d'une variable aléatoire

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x1$; $x2$; … ; xn.

Pour tous réels a et b, on peut définir une autre variable aléatoire, en

associant à chaque issue donnant la valeur xi, le nombre $axi + b$.

On note cette variable aléatoire $aX + b$.

Propriétés:

- Pour X et Y deux variables aléatoires quelconques
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

- $E(aX) = aE(X) \qquad \forall a \epsilon R$

- $E(X+b) = E(X) + b \qquad \forall b \epsilon R$

- $E(aX+b) = aE(X) + b$

Propriétés

- *Par définition:*

$$1)\ V(X) \geq 0.$$

$$2)\ 2)\ V(X+b) = V(X) \quad et \quad V(aX) = a^2 V(X).$$

3) *Pour tout réel Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :*

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Exemple

On donne $E(X) = 3$ et $V(X) = 16$.

Calculer :

1) $E(2X + 5)$
2) $V(2X + 5)$

Correction

1) $E(2X + 5) = 2E(X) + 5 = 2 \times 3 + 5 = 12$
2) $V(2X + 5) = (-2)^2 \times V(X) = 4 \times 16 = 64$

Variable aléatoire discrète

On donne les lois de probabilités du gain X et Y de deux jeux.

Jeu N° 1

x_i	5	1	0	1	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3

Jeu N° 2

y_i	3	1	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Pour le jeu N° 1 : $E(X) = 0,3$, $V(X) = 8,01$.

Pour le jeu N° 2 : $E(Y) = 0,3$, $V(Y) = 1,81$.

Variable aléatoire continue:

Une variable aléatoire est dite continue si son domaine de

variation est l’ensemble $\mathbb{R}$ ou un ensemble de $\mathbb{R}$

Variable aléatoire continue:

Une variable aléatoire continue est déterminée par une fonction dite

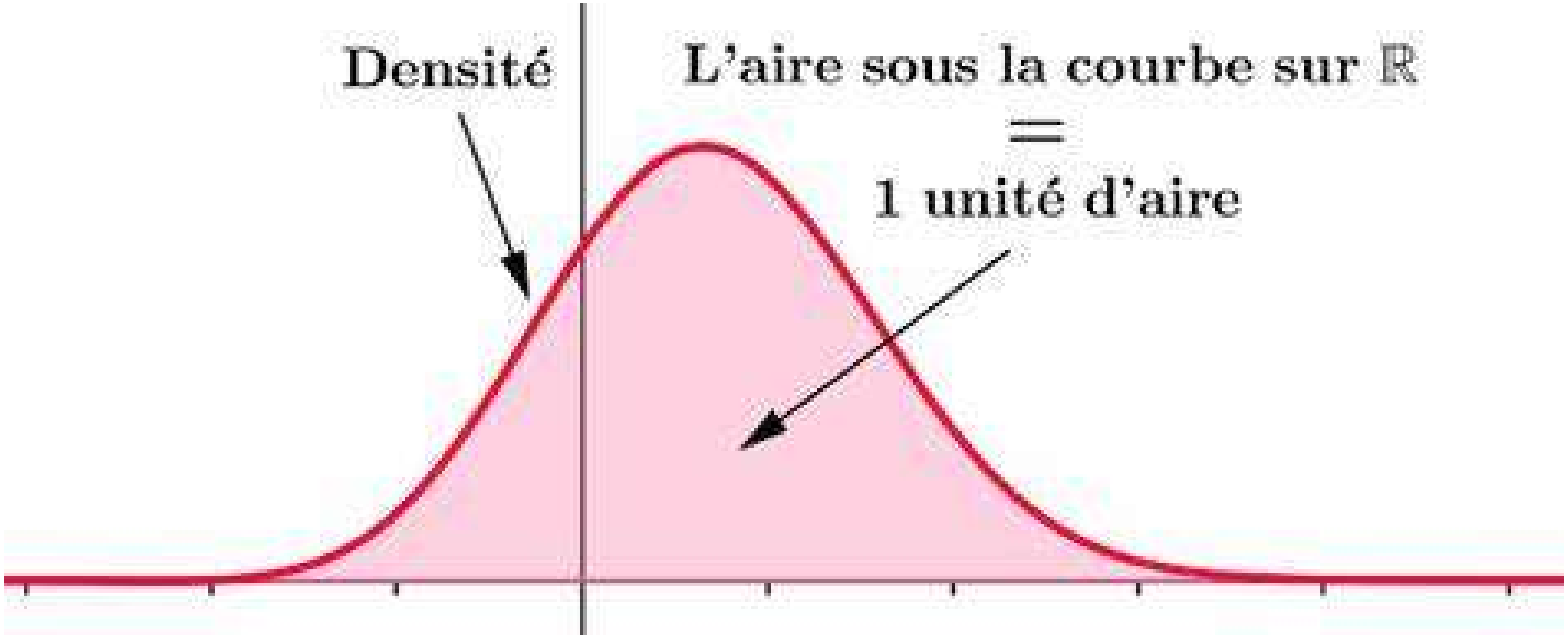
fonction de densité de probabilités notée $f(x)$ vérifiant:

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ (f est une fonction positive)

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1(\ L'aire\ au\ dessous\ de\ la\ courbe\ de\ f\ \ est\ \acute{e}gale \text{ à } 1)$$

Fonction de densité



Exemple

Soit :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si\ x \in [0;2] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

On va vérifier que f est une densité de probabilité:

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 \frac{x}{2} = \frac{x^2}{4}\bigg|_0^2 = 1$$

Variable aléatoire continue:

Pour une variable aléatoire continue X, on a:

1) $P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

2) $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue:

La fonction de répartition associée à la variable aléatoire X,

est la fonction, notée F *ou* $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ *par* :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Propriétés de la fonction de répartition d’une variable aléatoire continue:

Propriétés:

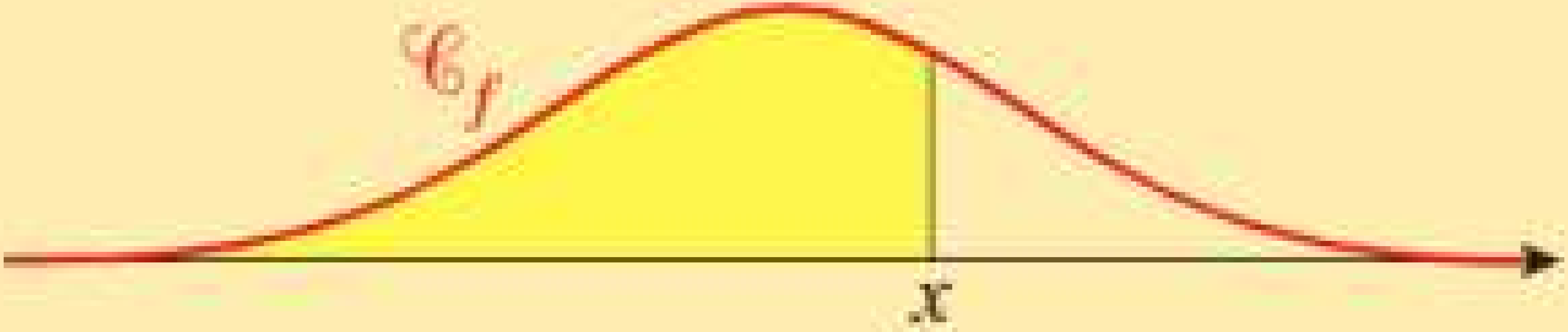
1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

2) *Elle est croissante au sens large:*

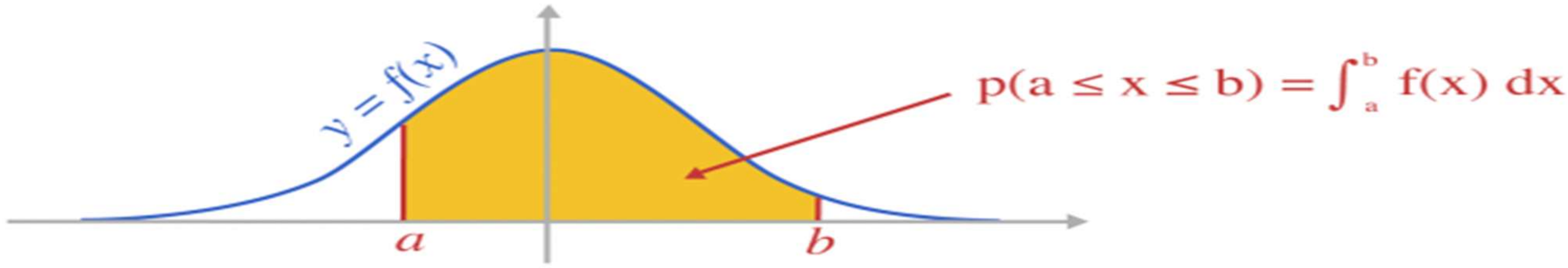
Si $a \leq b \quad alors\ F(a) \leq F(b)$

3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Fonction de répartition



$$\text{Aire du domaine jaune} = P(X \leqslant x) = F(x)$$



$y = f(x)$
$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$
a
b

La fonction de répartition permet de calculer la probabilité :

$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F_X(b) - F_X(a)$$

Remarque:

- $P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b)$

- Pour une variable continue:

$$P(X = a) = 0$$

Exemple

Pour $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & si\ x \in [0;2] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

On a $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

1) $Pour\ x < 0, F_X(x) = 0$

2) $Pour\ 0 \leq x < 2, F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{t}{2} dt = \frac{t^2}{4}\Big|_0^x = \frac{1}{4}x^2$

3) $Pour\ x \geq 2, F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{2} \frac{t}{2} dt + \int_{2}^{+\infty} 0dt = 1$

Alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & 0 \leq x < 2 \\ x \geq 2 & 1 \end{cases}$$

On a $\grave{F}_X(x) = f(x)$

Espérance mathématique d'une variable aléatoire continue

L'espérance mathématique d’une variable aléatoire X qui suit une densité de probabilité est donnée par :

$$E(X)= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

On reprend l'exemple précédent:

$$\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{8}{6}$$

Variance d'une variable aléatoire continue

La variance d'une variable aléatoire X suit une densité de probabilité est donnée par :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right)^2$$

On reprend l'exemple précédent:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right)^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} = \frac{x^4}{8}\Big|_0^2 = 2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$=$$

$$V(X) = \frac{2}{9}$$

Définition

Une variable aléatoire est dite centrée réduite si son

espérance est égale à 0 et son écart-type égale à 1.

La variable aléatoire $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ *est* <u>*centrée réduite*</u>

Démonstration

$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ *est une transformation affine*

$$Y = aX + b = \frac{1}{\sigma(X)}X - \frac{E(X)}{\sigma(X)}$$

<u>*Alors :*</u> $E(Y) = \frac{1}{\sigma(X)}E(X) - \frac{E(X)}{\sigma(X)} = 0$

$$V(Y) = (\frac{1}{\sigma(X)})^2 V(X) = 1$$