

Résolution des systèmes d'équation linéaires

Via

Méthodes itératives

Introduction

Ayant le système linéaire suivant,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \ddots + \vdots + \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{K})$ **matrice carrée associée au système**
 $\mathbf{x} = ??$

Quelle méthode est plus appropriée ?

Directe ? Vs Itérative ?

1) Méthodes directes

Pour $n=3 \rightarrow$: Gauss, factorisation LU

Pour $n \geq 4$ ou a_{ij} en virgule flottante \rightarrow propagation des erreurs d'arrondi + temps de calcul plus important

2) Méthodes itératives :

- Adaptées lorsque beaucoup de calcul en virgule flottante.
- Ces méthodes sont les seules à pouvoir fournir des résultats précis pour les systèmes de taille très importante.
- Certaines méthodes itératives s'approchent très vite des solutions exactes.
- Cette solution exacte (ou presque) ne peut être assurée après un nombre d'étapes connu à priori.

Principes des méthodes itératives

- 1) $Ax=B$, Expression de $X = ?$
Ramener le problème $Ax=B$ à la modélisation : $x = f(x)$
- 2) Ce type de problème est dit problème de recherche de point fixe ou problème d'approximations successives.
- 3) Sa méthode de résolution est à l'origine de la résolution de divers problèmes et permet d'obtenir des valeurs approchées $X^{(i)}$ d'une solution exacte X .
- 4) Les méthodes itératives construisent, à partir d'un vecteur $X^{(0)}$, une suite de vecteurs $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, \dots, X^{(n)}, \dots$ qui convergent vers la solution exacte X du système.

$X^{(0)}$ connu

$\rightarrow X^{(1)}$

$\rightarrow X^{(2)}$

$\rightarrow \dots$

$\rightarrow X^{(n)}$

Tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X^{(n)} - X\| = 0$$

5) En écrivant la matrice A sous la forme $A = M - N$, on obtient l'expression :

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \Leftrightarrow (M - N)x &= b \\ \Leftrightarrow Mx - Nx &= b \\ \Leftrightarrow Mx &= Nx + b \\ \Leftrightarrow M^{-1}Mx &= M^{-1}(Nx + b) \\ \\ \Leftrightarrow x &= M^{-1}Nx + M^{-1}b \\ \Leftrightarrow x &= Bx + R \\ \text{d'où } x &= f(x) \end{aligned}$$

6) Notre problème est ramené à la modélisation :

$$\begin{aligned} x &= f(x) \\ x &= M^{-1}Nx + M^{-1}b \\ \text{Ou } X^{(k+1)} &= BX^{(k)} + R \end{aligned}$$

7) Méthode de résolution des problèmes de point fixe (ou approximation successives)

Le principe de toutes les méthodes itératives est le suivant :

- choisir un vecteur $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
- générer la suite $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, telle que $X^{(k+1)} = M^{-1}NX^{(k)} + M^{-1}b$.
- si la suite $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers X^* , alors X^* est la solution du système $AX = b$.

8) Ayant la suite $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, définie par :

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ quelconque} \\ X^{(k+1)} = BX^{(k)} + M^{-1}b \end{cases}$$

$$\rightarrow X^{(k)} = (X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n)^t,$$

→ On appelle « **matrice d'itération** » la matrice $B = M^{-1}N$, pour M et N choisies,

→ La suite calculée **est convergente si une condition parmi les suivantes** est satisfaite :

1) $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|$ $i = 1..n$ (matrice à diagonale strictement dominante par ligne)

2) $\rho(M^{-1}N) < 1$ (ρ le rayon spectrale de B, $\rho(B) = \max\{|\lambda| / \lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(B)\}$)

→ **Test d'arrêt :**

Le calcul récurrent de cette suite doit être répété jusqu'à :

- Un nombre d'itération k fixé, ou bien ;
- $\max \frac{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{|x_i^{(k+1)}|} < \varepsilon$ (avec $\varepsilon > 0$ et $1 \leq i \leq n$)

Principales décompositions de la matrice associée :

La matrice A est écrite sous la forme : $A = D - E - F$ avec :

- D est une matrice diagonale (constituée des éléments de la diagonale de A).
- E est une matrice triangulaire inférieure sans diagonale
- F une matrice triangulaire supérieure sans diagonale.

Les matrices sont constituées directement à partir des éléments de A

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ -a_{n-11} & -a_{n-12} & \dots & 0 & 0 \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n-1} & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n-1} & -a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = D - E - F = \begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$$

Ainsi on a d'une part $A = M - N$
et d'autre part $A = D - E - F$.

Donc les matrices M et N peuvent être obtenues à partir des différents types de regroupement des matrices D , E et F .

Méthode de Jacobi :

$$M = D \text{ et } N = (E + F)$$

$$B = M^{-1}N = D^{-1}(E + F),$$

B matrice de JACOBI , d'itération

Méthode de Gauss-Seidel :

$$M = D - E \text{ et } N = F$$

$$B = M^{-1}N = (D - E)^{-1}(F)$$

Résolution du système

a. Méthode de Jacobi :

à partir de : $x = f(x) = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

Ou encore $X^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)X^{(k)} + D^{-1}b = BX^{(k)} + R$, on a la matrice de JACOBI

$$B = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ -a_{n-11} & -a_{n-12} & \dots & 0 & 0 \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n-1} & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n-1} & -a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & 0 & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = - \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & \dots & a_{1n-1}/a_{11} & a_{1n}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & \dots & a_{2n-1}/a_{22} & a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11}/a_{n-1n-1} & a_{n-12}/a_{n-1n-1} & \dots & 0 & a_{n-1n}/a_{n-1n-1} \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & \dots & a_{n1}/a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

$$BX^{(k)} = - \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & \dots a_{1n-1}/a_{11} & a_{1n}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & \dots a_{2n-1}/a_{22} & a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11}/a_{n-1n-1} & a_{n-12}/a_{n-1n-1} & \dots & 0 & a_{n-1n}/a_{n-1n-1} \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & \dots & a_{n1}/a_{nn} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \\ \dots \\ X_{n-1}^{(k)} \\ X_n^{(k)} \end{matrix}$$

$$BX^{(k)} = - \begin{bmatrix} \sum_{j \neq 1} \frac{a_{1j}^{(k)}}{a_{11}} X_j^{(k)} \\ \sum_{j \neq 2} \frac{a_{2j}^{(k)}}{a_{22}} X_j^{(k)} \\ \dots \\ \sum_{j \neq n-1} \frac{a_{n-1j}^{(k)}}{a_{n-1n-1}} X_j^{(k)} \\ \sum_{j \neq n} \frac{a_{nj}^{(k)}}{a_{nn}} X_j^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$R = M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \dots \\ b_{n-1}/a_{n-1n-1} \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X^{(0)} & \text{donné} \\ X_i^{(k+1)} & = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} X_j^{(k)}}{a_{ii}} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

Exemple :

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}, \text{ sa matrice associée } \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Résoudre ce système par la méthode de Jacobi :

- en utilisant $X^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ comme solution de départ.
- Retenir la solution après 3 itérations

Résolution

Convergence de la matrice A : vérifiée car la matrice A est diagonale dominante.

X	$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$
x_1	0	$x_1^{(1)} = \frac{1}{4} (3 + x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)})$	$x_1^{(2)} = \frac{1}{4} (3 + x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)})$	$x_1^{(3)} = \frac{1}{4} (3 + x_2^{(2)} - 2x_3^{(2)})$
x_2	0	$x_2^{(1)} = \frac{-1}{6} (4 - 2x_1^{(0)} - 3x_3^{(0)})$	$x_2^{(2)} = \frac{-1}{6} (4 - 2x_1^{(1)} - 3x_3^{(1)})$	$x_2^{(3)} = \frac{-1}{6} (4 - 2x_1^{(2)} - 3x_3^{(2)})$
x_3	0	$x_3^{(1)} = \frac{1}{4} (2 + x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)})$	$x_3^{(2)} = \frac{1}{4} (2 + x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)})$	$x_3^{(3)} = \frac{1}{4} (2 + x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)})$

$X^{(0)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$
0	$x_1^{(1)} = \frac{3}{4}$	$x_1^{(2)} = \frac{1}{3}$	$x_1^{(3)} = \frac{23}{32}$
0	$x_2^{(1)} = \frac{-2}{3}$	$x_2^{(2)} = \frac{-1}{6}$	$x_2^{(3)} = \frac{-163}{288}$
0	$x_3^{(1)} = \frac{1}{2}$	$x_3^{(2)} = \frac{-1}{48}$	$x_3^{(3)} = \frac{1}{3}$

```

3  function [x]=Jacobi(A,b)
4  %vérification des tailles de A et b effectués avant l'appel de la fonction
5  n = length(b);
6  x0 = zeros(n, 1);
7  err = 1;
8  fprintf('matrice de JACOBI ou d''itération \n')
9  invM=inv(diag(diag(A)))
10 N=-(tril(A)+triu(A)-2*diag(diag(A)))
11 B=invM*N
12 fprintf('second membre R \n')
13 disp(invM*b)
14 spectre=eig(invM*N)
15 rayonSPECTRALE=max(abs(spectre))
16 fprintf('[iter X err] \n')
17 cpt=0;
18 disp([cpt x0' err])
19 while err > 10^ - 6;
20     for i = 1 : n;
21         x(i) = (b(i) - A(i, [1 : (i - 1) , (i + 1) : n]) * x0([1 : (i - 1), (i + 1) : n])) / A(i, i);
22     end
23     err = max(abs(x' - x0));
24     x0 = x';
25     cpt=cpt+1;
26     disp([ cpt x0' err])
27 end

```

matrice de JACOBI ou d'itération

invM =

1/4	0	0
0	-1/6	0
0	0	1/4

N =

0	1	-2
-2	0	-3
-1	2	0

B =

0	1/4	-1/2
1/3	0	1/2
-1/4	1/2	0

second membre R

3/4
-2/3
1/2

spectre =

-421/541
712/2193
522/1151

rayonSPECTRALE =

421/541

[iter X err]

0	0	0	0	1
1	3/4	-2/3	1/2	3/4
2	1/3	-1/6	-1/48	25/48
3	23/32	-163/288	1/3	115/288
4	509/1152	-25/96	43/1152	11/36
5	511/767	-346/691	1195/4608	564/2347
6	613/1238	-268/851	793/9545	526/2831
7	1151/1151	-1/1	1/1	1/1

Remarque

1. S'il existe $i_0 \in [1, n]$ tel que $a_{i_0 i_0} = 0$, on procède à une permutation de ligne sur A (et sur le second membre b).
2. En général, la convergence de l'une de ces méthodes n'implique pas la convergence de l'autre.
3. Plus $\rho(B) \ll 1$, plus la convergence du processus itératif vers la solution exacte du système $AX = b$ est plus rapide